

# TD 3 : Récursivité

Algorithmes et programmation.

2023

## Exercice 1 — *Parcours de liste*

Une liste est une suite ordonnée d'entiers. Une liste est caractérisée par son premier élément et le reste de ses éléments (nommés généralement `head` et `tail`.) Ainsi la liste  $[4, 2, 1, 7, 2, 3]$  a pour tête 4 et pour queue la liste  $[2, 1, 7, 2, 3]$ . On suppose que la liste vide s'écrit  $\emptyset$ . On dispose de 5 fonctions,

- `empty(L)` renvoie vrai si la liste  $L$  est vide
  - `head(L)` renvoie la tête de  $L$
  - `tail(L)` renvoie la queue de  $L$
  - `print(i)` affiche l'entier  $i$  (suivi d'un saut de ligne)
  - `cons(i, L)` construit et renvoie la liste  $L'$  dont la tête est  $i$  et dont la queue est  $L$ .
1. Écrire une fonction récursive qui affiche le contenu de la liste. Montrer ensuite que cette fonction se termine et qu'elle affiche le bon résultat.
  2. Écrire une fonction récursive qui concatène 2 listes.
  3. En déduire une fonction récursive qui prend en entrée une liste et inverse le contenu de cette liste.
  4. Réécrire cette dernière fonction sous forme récursive terminale, la nouvelle fonction prendra en entrée 2 listes.

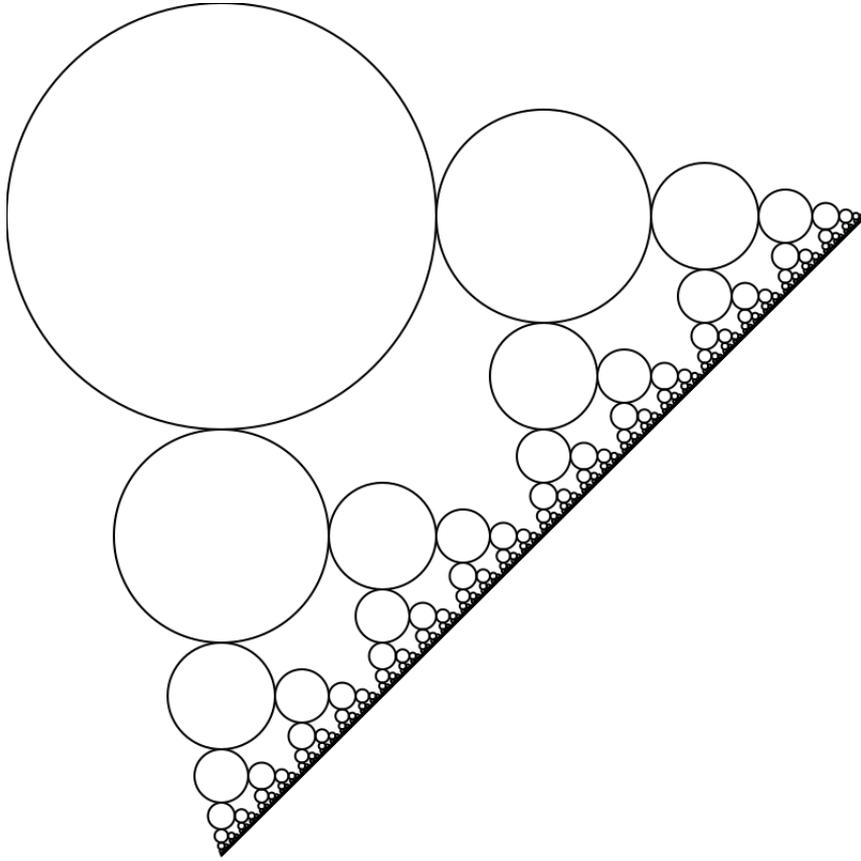
## Exercice 2 — *Récursivité terminale*

Réécrire les fonctions suivantes sous forme récursive terminale.

1. **ENTRÉES:** Deux entiers  $n$  et  $k$   
**SORTIES:**  $\binom{n}{k}$   
**Si  $k = n$  ou  $k = 0$  Alors**  
    **Renvoyer 1.**  
    **Renvoyer  $\binom{n-1}{k-1} * \frac{n}{k}$**
2. Dans la fonction suivante,  $I$  est la matrice identité.  
**ENTRÉES:** Une liste  $L = [A_1, A_2, \dots, A_n]$  de matrices,  
**SORTIES:**  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$   
    **function MULT(L)**  
    **Si  $L = \emptyset$  Alors**  
        **Renvoyer  $I$ .**  
    **Renvoyer  $A_1 \times \text{MULT}([A_2, \dots, A_n])$**
3. Pour la suivante, vous aurez besoin d'exécuter 2 fonctions récursives terminales pour répondre.  
**ENTRÉES:** Une liste  $L = [b_1, b_2, \dots, b_n]$  d'entiers, une fonction  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ , un entier  $a$   
**SORTIES:**  $f(b_1, f(b_2, \dots f(b_n, a) \dots))$   
    **function FOLD(L, f, a)**  
    **Si  $L = \emptyset$  Alors**  
        **Renvoyer  $a$ .**  
    **Renvoyer  $f(b_1, \text{FOLD}([b_2, \dots, b_n], f, a))$**

### Exercice 3 — Cercles

1. Ecrire une fonction récursive qui, connaissant une fonction `CERCLE( $p, r$ )` affiche un cercle de centre  $p$  et de rayon  $r$ , la fractale suivante :



Pour chaque cercle, deux copies de ce cercle ayant subi une réduction d'un facteur 2 sont placés tangents extérieurement au cercle initial et tels que les lignes des centres sont parallèles aux axes du repère.

2. Montrer qu'aucun cercle n'intersecte un autre.