

Chapitre 3 : Programmation linéaire et approximation polynomiale

MPRO - Complexité : algorithmes approchés

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Programme linéaire

Programme linéaire

Maximiser

$$c \cdot {}^t y$$

s.c.

$$A \cdot {}^t y \leq b$$

$$y \in (\mathbb{R}^+)^n$$

n : nb variables

m : nb contraintes

Programme dual

Programme primal (PP)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & c \cdot {}^t y \\
 \text{s.c.} & A \cdot {}^t y \geq b \\
 & y \in (\mathbb{R}^+)^n
 \end{array}$$

Programme dual (DP)

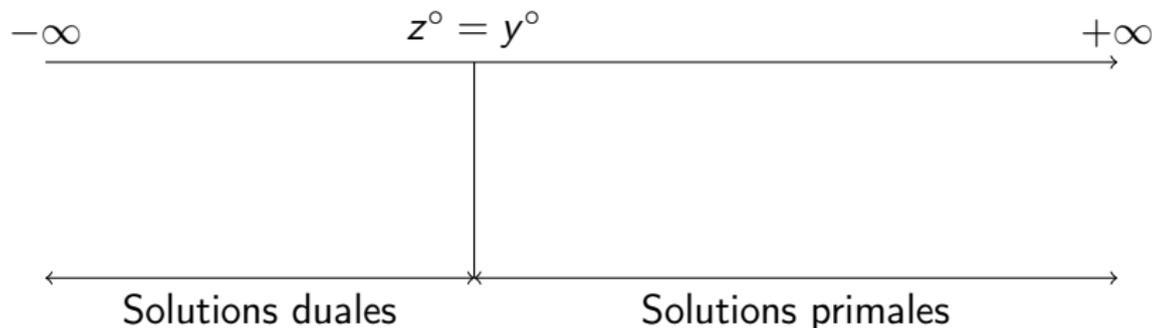
$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & b \cdot {}^t z \\
 \text{s.c.} & {}^t A \cdot {}^t z \leq c \\
 & z \in (\mathbb{R}^+)^m
 \end{array}$$

Remarque : (PP) est le dual de son dual.

Théorème de Dualité forte

Soit y° et z° deux solutions optimale de (PP) et (DP) alors

$$c \cdot {}^t y^\circ = b \cdot {}^t z^\circ$$



Programmation linéaire en nombres entiers

(PLNE)

Le problème (PLNE) qui consiste, connaissant un programme linéaire en nombre entier, à en extraire une solution optimale, est dans (NPO) et est NP-Difficile.

Théorème

Si $\Pi \in NPO$ et Π_D est NP-Complet, alors $\Pi_C \preceq_T \Pi_D$.

Corollaire

Si $\Pi \in NPO$ et Π_D est NP-Complet, alors $\Pi_C \preceq_T (PLNE)$.

Programme linéaire relâché

Programme linéaire en nombre entiers (PPNE)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & c \cdot {}^t y \\
 \text{s.c.} & A \cdot {}^t y \geq b \\
 & y \in \mathbb{N}^n
 \end{array}$$

Programme relâché (RP)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & c \cdot {}^t y \\
 \text{s.c.} & A \cdot {}^t y \geq b \\
 & y \in (\mathbb{R}^+)^n
 \end{array}$$

$$y_i \in \mathbb{Z} \rightarrow y_i \in \mathbb{R}$$

$$y_i \in A \subset \mathbb{Z} \rightarrow y_i \in [\min(A), \max(A)]$$

Programme linéaire relâché

Programme linéaire dual en nombre entiers (DPNE)

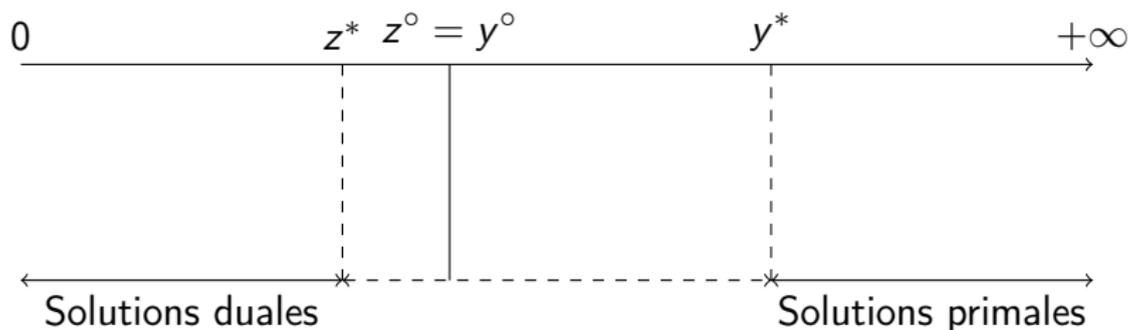
$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & b \cdot {}^t z \\ \text{s.c.} & {}^t A \cdot {}^t z \leq c \\ & z \in \mathbb{N}^m \end{array}$$

Programme relâché (DRP)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & b \cdot {}^t z \\ \text{s.c.} & {}^t A \cdot {}^t z \leq c \\ & z \in (\mathbb{R}^+)^m \end{array}$$

Théorème

Soit y° , y^* , z° et z^* des solutions optimales de (RP), (PPNE), (DP) et (DPNE) alors $c \cdot {}^t y^* \leq c \cdot {}^t y^\circ = b \cdot {}^t z^\circ \leq b \cdot {}^t z^*$



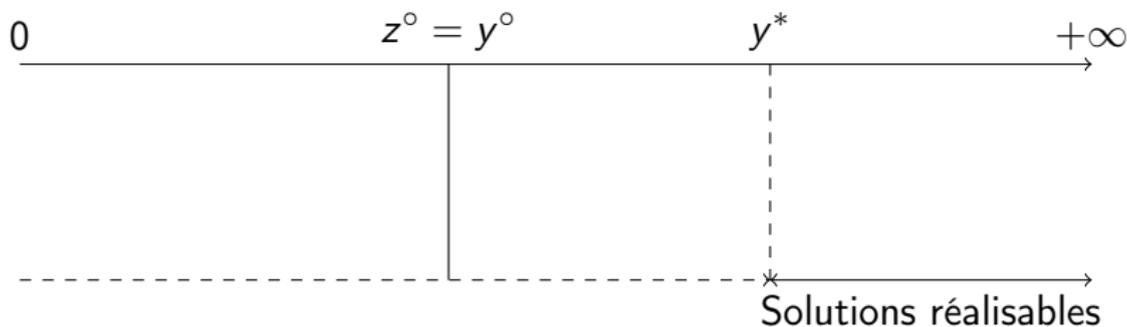
Notation

Dans la suite, on considère un problème de **minimisation** Π modélisable par un (PLNE). Connaissant une instance x de Π , on définit y^* une solution optimale de x de poids $\mathcal{M}^*(x)$ et y° une solution optimale du programme relâché de poids $\mathcal{M}^\circ(x)$.

Borne inférieure d'une solution optimale

Constat

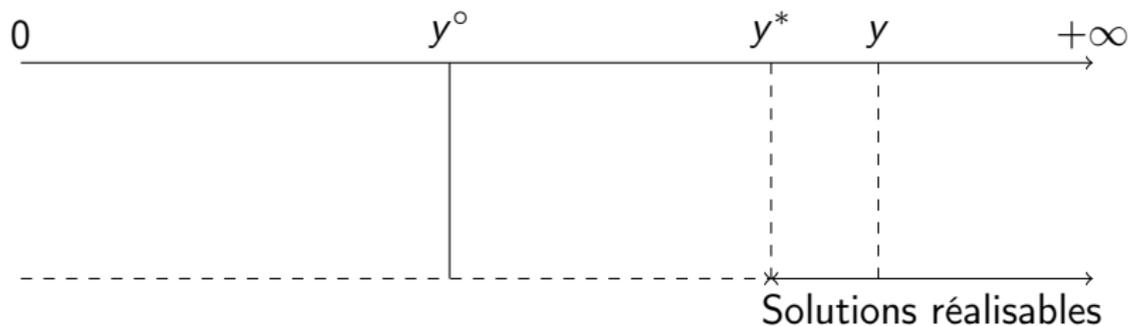
$\mathcal{M}^\circ(x)$ est une borne inférieure de $\mathcal{M}^*(x)$.



Notion d'arrondi

Algorithme d'arrondi

- Calculer y°
- Trouver une solution y réalisable "proche" de y^* en arrondissant y° .



Rapport intégral

Rapport intégral r_i

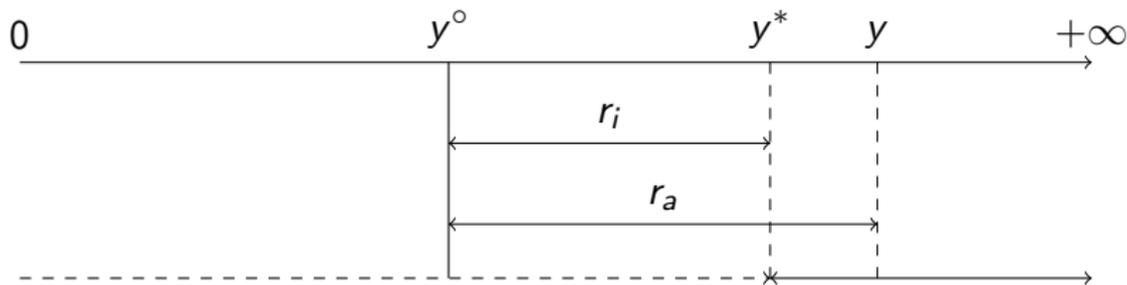
On nomme *rapport intégral* ou *saut intégral* ou *integral gap* le

$$\text{rapport } r_i = \sup_x \frac{\mathcal{M}^*(x)}{\mathcal{M}^\circ(x)}.$$

Rapport d'arrondi r_A

Soit un algorithme d'arrondi \mathcal{A} , on nomme *rapport d'arrondi* le

$$\text{rapport } r_A = \sup_x \frac{\mathcal{M}(x, \mathcal{A}(x))}{\mathcal{M}^\circ(x)}.$$



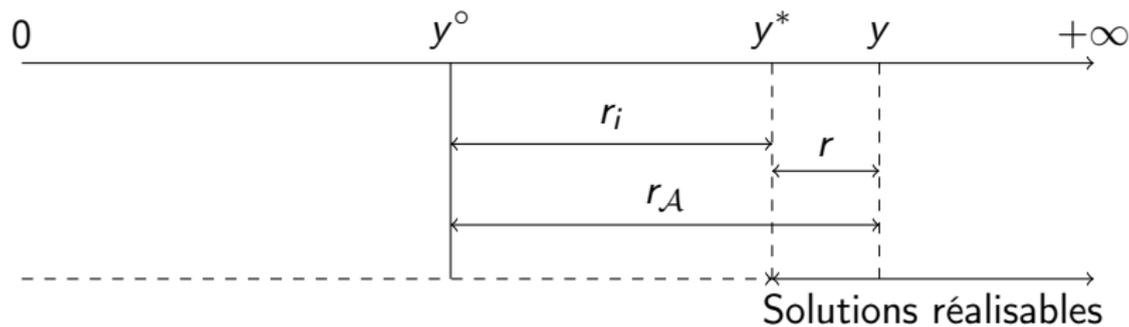
Lien entre les rapports

Théoreme

$$r_i \leq r_A.$$

Rapport d'approximation

$$r \leq r_A$$



Mise au point

Attention !

- r_i dépend du programme linéaire utilisé pour modéliser Π
- $r_{\mathcal{A}}$ et r dépendent aussi de ce programme linéaire
- $r_{\mathcal{A}}$ et r dépendent de l'algorithme d'arrondi utilisé

Limitations

Empiriquement, pour tout algorithme d'arrondi utilisant un programme linéaire de rapport r_i , on vérifie $r_i \leq r$.

Exemples d'arrondi : couverture par ensemble

Instance de set cover : $(X, \mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$

Programme linéaire en nombre entiers pour Set Cover (PP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega(s) \cdot y_s \\
 \text{s.c.} & \sum_{s: e \in \mathcal{S}_s} y_s \geq 1 \quad \forall e \in X \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in \mathcal{S}
 \end{array}$$

Programme relâché (RP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega(s) \cdot y_s \\
 \text{s.c.} & \sum_{s: e \in \mathcal{S}_s} y_s \geq 1 \quad \forall e \in X \\
 & y_s \in [0, 1] \quad \forall s \in \mathcal{S}
 \end{array}$$

Exemples d'arrondi : couverture par ensemble

Algorithme d'arrondi

- $f \leftarrow \max_{e \in X} (|\{s \in \mathcal{S} \mid e \in s\}|)$
- Trouver y° , une solution optimale de (RP1)
- $\forall s \in \mathcal{S}$, si $y_s^\circ \geq \frac{1}{f}$
 - $y_s \leftarrow 1$

Rapport d'approximation : f

Exemples d'arrondi probabiliste : max-SAT

Entrées

- Des variables booléennes x_1, x_2, \dots, x_n
- Des clauses disjonctives C_1, C_2, \dots, C_m sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n
- Des poids sur les clauses $\omega(C_i)$

Sortie

Une affectation de $x_1, x_2 \dots x_n$ telle que la somme des poids des clauses vraies est maximum.

Exemples d'arrondi probabiliste : max-SAT

Programme linéaire en nombre entiers pour max-SAT (PP2)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & \sum_{i=1}^m \omega(C_i) z_i \\
 \text{s.c.} & \sum_{x_j \in C_i} y_j + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} (1 - y_j) \geq z_i \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \\
 & z_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \\
 & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket
 \end{array}$$

Programme linéaire relâché (RP2)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & \sum_{i=1}^m \omega(C_i) z_i \\
 \text{s.c.} & \sum_{x_j \in C_i} y_j + \sum_{\bar{x}_j \in C_i} (1 - y_j) \geq z_i \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \\
 & z_i \in [0, 1] \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \\
 & y_j \in [0, 1] \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket
 \end{array}$$

Exemples d'arrondi probabiliste : max-SAT

Algorithme d'arrondi

- Trouver y°, z° , une solution optimale de (RP2)
- $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,
 - $y_j \leftarrow \text{true}$ avec une probabilité y_j° sinon *false*

Rapport d'approximation (probabiliste) : $1 - \frac{1}{\exp(1)}$.

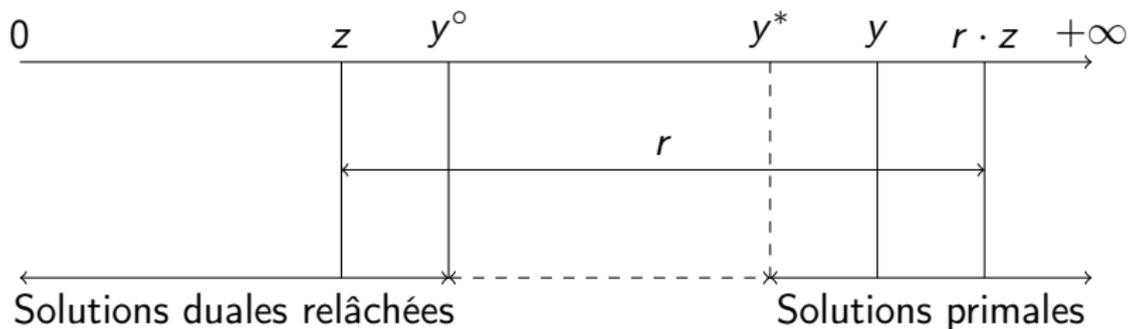
Remarque : cet arrondi peut être déterminisé.

Notation

Dans la suite, on considère un problème de **minimisation** Π modélisable par un (PLNE). Connaissant une instance x de Π , on définit y^* une solution optimale de x de poids $\mathcal{M}^*(x)$.

Principe

Trouver une solution réalisable primale y , une solution réalisable z du dual relâché telle que $c \cdot {}^t y \leq r \cdot b \cdot {}^t z$.



Exemples de dual fitting : couverture par ensemble

Instance de set cover : $(X, \mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$

Programme linéaire en nombre entiers pour Set Cover (PP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega(s) \cdot y_s \\
 \text{s.c.} & \sum_{s: e \in s} y_s \geq 1 \quad \forall e \in X \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in \mathcal{S}
 \end{array}$$

Programme dual relâché (DP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & \sum_{e \in X} z_e \\
 \text{s.c.} & \sum_{e \in s} z_e \leq \omega(s) \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
 & z_e \geq 0 \quad \forall e \in X
 \end{array}$$

Exemples de dual fitting : couverture par ensemble

Algorithme de Johnson (1974), Lovàsz (1975) et Chvàtal (1979)

- Tant que des éléments X' de X sont non couverts, sélectionner l'ensemble s minimisant $p(X', s) = \omega(s)/|X' \cap s|$.

Analyse Dual fitting

- Quand e est couvert par s avec X' non couvert, posons $z_e = p(X', s)$
- Posons $r = H_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n})$.

Rapport d'approximation : H_n .

Écarts complémentaires

Conditions d'écarts complémentaires primales et duales

Soit y et z des solutions réalisables primales et duales. y et z sont optimales si et seulement si

- Pour tout $i \leq n$, $y_i = 0$ ou $\sum_{j=1}^m a_{ji}z_j = c_i$
- Pour tout $j \leq m$, $z_j = 0$ ou $\sum_{i=1}^n a_{ji}y_i = b_j$

Notation

Dans la suite, on considère un problème de **minimisation** Π modélisable par un (PLNE). Connaissant une instance x de Π , on définit y^* une solution optimale de x de poids $\mathcal{M}^*(x)$.

Écarts complémentaires relâchés

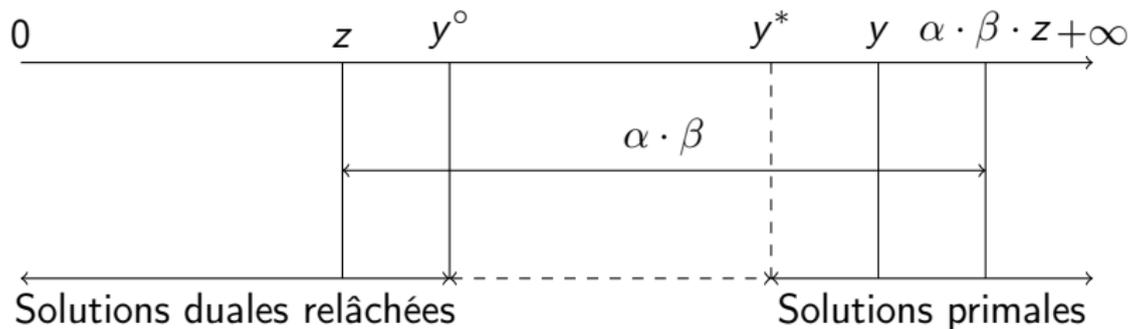
Conditions d'écarts complémentaires primales et duales relâchées

Soient $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$. Soit y et z des solutions réalisables primales et duales. Ces deux solutions vérifient les conditions relâchées si

- Pour tout $i \leq n$, $y_i = 0$ ou $\frac{c_i}{\alpha} \leq \sum_{j=1}^m a_{ji} z_j \leq c_i$
- Pour tout $j \leq m$, $z_j = 0$ ou $b_j \leq \sum_{i=1}^n a_{ji} y_i \leq b_j \cdot \beta$

alors dans ce cas

$$c \cdot {}^t y \leq \alpha \cdot \beta \cdot b \cdot {}^t z$$



Exemples de schémas primadual : couverture par ensemble

Instance de set cover : $(X, \mathcal{S} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$

Programme linéaire en nombre entiers pour Set Cover (PP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & \sum_{s \in \mathcal{S}} \omega(s) \cdot y_s \\
 \text{s.c.} & \sum_{s: e \in \mathcal{S}} y_s \geq 1 \quad \forall e \in X \\
 & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in \mathcal{S}
 \end{array}$$

Programme dual relâché (DP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & \sum_{e \in X} z_e \\
 \text{s.c.} & \sum_{e \in \mathcal{S}} z_e \leq \omega(s) \quad \forall s \in \mathcal{S} \\
 & z_e \geq 0 \quad \forall e \in X
 \end{array}$$

Exemples de schémas primadual : couverture par ensemble

- $z \leftarrow 0$
- Tant qu'il existe un élément e non couverts
 - Augmenter z_e jusqu'à ce qu'il existe s tel que $\sum_{e \in s} z_e = \omega(s)$
 - Sélectionner tous les ensembles s tels que $\sum_{e \in s} z_e = \omega(s)$

Analyse schémas primadual

Posons $\alpha = 1$ et $\beta = f$

Rapport d'approximation : f .

Exemples de schémas primadual : multiflot, multicoupe dans un arbre

Problème de multicoupe minimum : Entrées

- Un arbre $T = (V, E)$
- k couples de nœuds $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_k, t_k)$
- des capacités $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

Sortie

Un sous-ensemble d'arêtes de E séparant chaque s_i de t_i et de capacité minimum.

Exemples de schémas primadual : multiflot, multicoupe

p_i : chaîne de s_i à t_i dans T

Programme linéaire en nombre entiers pour Set Cover (PP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser} & \sum_{e \in \mathcal{E}} c(e) \cdot d_e \\
 \text{s.c.} & \sum_{e \in p_i} d_e \geq 1 \quad \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket \\
 & d_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E
 \end{array}$$

Programme dual relâché (DP1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiser} & \sum_{i=1}^k f_i \\
 \text{s.c.} & \sum_{i: e \in p_i} f_i \leq c(e) \quad \forall e \in E \\
 & f_i \geq 0 \quad \forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket
 \end{array}$$

Exemples de schémas primadual : multiflot, multicoupe

Algorithme de Garg, Vazirani, Yannakakis (1997)

- Orienter T depuis une racine arbitraire
- $f \leftarrow 0, D \leftarrow \emptyset$
- Pour chaque nœud v , par ordre de profondeur inverse
 - Pour chaque (s_i, t_i) avec v le plus proche ancêtre commun de s_i et t_i
 - Augmenter f_i jusqu'à saturer un arc.
 - Ajouter D tous les arcs saturés
- Pour chaque arête e de D , dans l'ordre inverse d'ajout dans D
 - Si $D \setminus \{e\}$ est une coupe séparant s_i de t_i , $D \leftarrow D \setminus \{e\}$
- Renvoyer D

Exemples de schémas primadual : multiflot, multicoupe

Analyse schémas primadual

Posons $\alpha = 1$ et $\beta = 2$

Rapport d'approximation : 2.