

Chapter 4: Inapproximability

MPRO - Complexity: approximation algorithms

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Rapport serré

Soit $\mathcal{A}$ une r -approximation pour un problème $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$. On dit que le rapport r est serré si on peut trouver des instances x de taille arbitrairement grandes dont la solution renvoyée est arbitrairement proche de $r \cdot \mathcal{M}^*(x)$:

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}} \setminus \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{M}(x_n, \mathcal{A}(x_n))}{\mathcal{M}^*(x_n)} = r$$

$$|x_{n+1}| > |x_n|$$

Exemples : problème de Steiner

Algorithm of Choukmane (1978) et de Kou *et al.* (1981), PLesnik (1981) and Iwainsky *et al.* (1986)

- For every x, x' , compute the shortest path $p(x, x')$ from x to x' of weight $d(x, x')$
- Build the complete graph $H = (X, E')$ weighted with d .
- Compute a minimum spanning tree T_H of H .
- Compute $T = \bigcup_{(x, x') \in T_H} p(x, x')$.
- Simplify T (remove the cycles, the non terminal leaves, ...).
- Return T .

Approximation ratio: $2 \cdot (1 - \frac{1}{k})$

Exemples : problème de Voyageur de commerce

(Simplified) algorithm of Christofides

- Compute a minimum spanning tree T of G .
- Return the cycle that visits the nodes of G in the same order than a depth first search of T .

Approximation ratio: 2 si inégalité triangulaire.

Exemple : couverture par ensembles

Algorithm of Johnson (1974), Lovász (1975) and Chvátal (1979)

- While some elements X' of X are uncovered, select the set s minimizing $\omega(s)/|X' \cap s|$.

Approximation ratio: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \sim \ln(k)$

L-Réduction : $\leq_L$

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ deux problèmes de NPO.

Une réduction L de Π vers Π' , notée $\Pi \leq_L \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \leq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $|\mathcal{M}(x, g(y')) - \mathcal{M}^*(x)| \leq \beta \cdot |\mathcal{M}'(f(x), y') - \mathcal{M}'^*(f(x))|$

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}' = \min$$

Si Π' est ρ -approximable alors Π est $1 + \alpha\beta(\rho - 1)$ -approximable.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}' = \max$$

Si Π' est ρ -approximable alors Π est $1 - \alpha\beta(1 - \rho)$ -approximable.

Propriétés de la L-réduction

Théorème

Si $\Pi \in \text{NPO}$ et $\Pi' \in \text{APX}$ et $\Pi \leq_L \Pi'$ alors $\Pi \in \text{APX}$

Théorème

Si $\Pi \in \text{NPO}$ et $\Pi' \in \text{PTAS}$ et $\Pi \leq_L \Pi'$, alors $\Pi \in \text{PTAS}$

Réduction isofacteur : min min

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \min)$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \min')$ deux problèmes de NPO.

Une réduction isofacteur de Π vers Π' , notée $\Pi \leq_I \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \leq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $\mathcal{M}(x, g(y')) \leq \beta \cdot \mathcal{M}'(f(x), y')$

Si Π' est ρ -approximable alors Π est $\alpha\beta\rho$ -approximable.

Réduction isofacteur : $\max \max$

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \max)$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \max')$ deux problèmes de NPO.

Une réduction isofacteur de Π vers Π' , notée $\Pi \leq_I \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \geq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $\mathcal{M}(x, g(y')) \geq \beta \cdot \mathcal{M}'(f(x), y')$

Si Π' est ρ -approximable alors Π est $\alpha\beta\rho$ -approximable.

Propriétés de la réduction isofacteur

Théorème

Si $\Pi \in \text{NPO}$ et $\Pi' \in \text{APX}$ et $\Pi \leq_I \Pi'$ alors $\Pi \in \text{APX}$

Théorème

Si $\Pi \in \text{NPO}$ et $\Pi' \in \text{PTAS}$ et $\Pi \leq_I \Pi'$ avec $\alpha = \beta = 1$ de Π vers Π' alors $\Pi \in \text{PTAS}$

Inapproximabilité par GAP

Définition

Il existe une GAP-Réduction du problème de **décision**
 $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ NP-Complet vers le problème de **minimisation**
 $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ s'il existe deux réels α et G et une
transformation polynomiale $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$:

- si $x \in \mathcal{L}^Y$, $\mathcal{M}'^*(f(x)) < G$;
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout $y \in \mathcal{S}'(f(x))$, $\mathcal{M}'(f(x), y) \geq \alpha G$

Π ne peut être approché avec un rapport α si $P \neq NP$.

Inapproximabilité par GAP

Définition

Il existe une GAP-Réduction du problème de **décision** $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ NP-Complet vers le problème de **maximisation** $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ s'il existe deux réels α et G et une transformation polynomiale $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$:

- si $x \in \mathcal{L}^Y$, $\mathcal{M}'^*(f(x)) > G$;
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout $y \in \mathcal{S}'(f(x))$, $\mathcal{M}'(f(x), y) \leq \alpha G$

Π ne peut être approché avec un rapport α si $P \neq NP$.

PTAS-Réduction : min min

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ deux problèmes de NPO.

Une réduction PTAS de Π vers Π' , notée $\Pi \leq_{PTAS} \Pi'$, est une triple transformation f, g, c :

- $f : \mathcal{I} \times]0, 1[\rightarrow \mathcal{I}'$ avec $f(x, \varepsilon)$ calculable en temps polynomial par rapport à $|x|$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \times]0, 1[\rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $g(y', \varepsilon)$ calculable en temps polynomial par rapport à $|y'|$
- $c :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$
- $\frac{\mathcal{M}'(f(x), y')}{\mathcal{M}'^*(f(x))} \leq 1 + c(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\mathcal{M}(x, g(y', \varepsilon))}{\mathcal{M}^*(x)} \leq 1 + \varepsilon$

Propriétés de la réduction PTAS

Théorème

Si $\Pi \in \text{NPO}$ et $\Pi' \in \text{PTAS}$ et $\Pi \leq_{\text{PTAS}} \Pi'$ alors $\Pi \in \text{PTAS}$

Notion de problème intermédiaire

Définition

Un problème $\Pi \in \mathcal{C}$ sous la réduction $\leq_R$ est $\mathcal{C}$ -complet si pour tout $\Pi' \in \mathcal{C}$, $\Pi' \leq_R \Pi$.

Définition

Une réduction $\leq_R$ préserve l'appartenance à une classe $\mathcal{C}$ si $\Pi \in \mathcal{C}$ et $\Pi' \leq_R \Pi \Rightarrow \Pi' \in \mathcal{C}$.

Notion de problème intermédiaire

Propriété

Si $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$, si Π est $\mathcal{C}$ -complet sous une réduction $\leq_R$ préservant l'appartenance à la classe $\mathcal{C}'$ alors $\Pi \notin \mathcal{C}'$.

Définition

Un problème $\Pi \in \mathcal{C}$ est $\mathcal{C}$ -intermédiaire vis-à-vis de la classe $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$ sous la réduction $\leq_R$ préservant l'appartenance à $\mathcal{C}'$ si $\Pi \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$ et si Π n'est pas $\mathcal{C}$ -complet.

Autres réductions

Autres réductions

- réduction AF (rapport différentiel)
- réduction stricte
- réduction AP
- réduction P
- réduction E
- réduction F
- ...

PCP

PCP(r, q)

La classe PCP(r, q) contient tous les problèmes de décision $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ tel qu'il existe un algorithme probabiliste $\mathcal{A}$ de vérification tel que :

- $\mathcal{A}$ prend en entrée une instance x de Π et un certificat c de taille polynomiale et répond OUI ou NON.
- $\mathcal{A}$ lit au plus $r(n)$ bits aléatoires
- $\mathcal{A}$ lit au plus $q(n)$ bits de c
- si $x \in \mathcal{L}^Y$, il existe un certificat c tel que $\mathcal{A}(x, c)$ répond OUI avec une probabilité 1
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout certificat c tel que $\mathcal{A}(x, c)$ répond NON avec une probabilité au moins $1/2$

PCP et NP

Théorème

$$\text{NP} = \text{PCP}(0, \text{poly}(n))$$

Théorème

$$\text{NP} = \text{PCP}(O(\log(n)), O(1))$$

Conséquences

Corollaire

Max-3SAT, Vertex-Cover, Steiner Tree $\notin$ PTAS si $P \neq NP$.

Corollaire

$\forall 1 > \varepsilon > 0$, Set Cover ne peut être approché avec un rapport meilleur que $(1 - \varepsilon) \log(n)$ si $P \neq NP$.

Corollaire

$\forall 1/2 > \varepsilon > 0$ Clique ne peut être approché avec un rapport meilleur que n^ε si $P \neq NP$.