Chapitre 4 : Inapproximabilité

MPRO - Complexité : algorithmes approchés

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Rapport serré

Soit $\mathcal{A}$ une r-approximation pour un problème $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$. On dit que le rapport r est serré si on peut trouver des instances x de taille arbitrairement grandes dont la solution renvoyée est arbitrairement proche de $r \cdot \mathcal{M}^*(x)$:

$$\exists \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{I}^{\mathbb{N}} \setminus \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathcal{M}(x_n, \mathcal{A}(x_n))}{M^*(x_n)} = r$$

$$|x_{n+1}| > |x_n|$$

Exemples : problème de Steiner

Algorithme de Choukkmane (1978) et de Kou *et al.* (1981), PLesnìk (1981) et Iwainsky *et al.* (1986)

- Pour tout $x, x' \in X$, calculer un plus court chemin $p(x, x')$ de x à x' de poids $d(x, x')$.
- Créer un graphe $H = (X, E')$ complet pondéré avec d.
- Calculer un arbre couvrant T_H de H.
- Calculer $T = \bigcup_{(x,x') \in T_H} p(x, x')$.
- Nettoyer T (supprimer les cycles, les feuilles non terminales, $\ldots$).
- Renvoyer T.

Rapport d'approximation : $2 \cdot (1 - \frac{1}{k})$

Exemples : problème de Voyageur de commerce

Algorithme de Christofides (simplifié) (1976)

- Calculer un arbre couvrant T de poids minimum de G
- Renvoyer le cycle visitant les nœuds de G dans l'ordre d'un parcours en profondeur de T.

Rapport d'approximation : 2 si inégalité triangulaire.

Exemple : couverture par ensembles

Algorithme de Johnson (1974), Lovàsz (1975) et Chvàtal (1979)

- Tant que des éléments X' de X sont non couverts, sélectionner l'ensemble s minimisant $\omega(s)/|X' \cap s|$.

Rapport d'approximation : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \sim \ln(k)$

L-Réduction : $\leq_L$

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ deux problèmes de NPO.
Une réduction L de Π vers Π', notée $\Pi \leq_L \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \leq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $|\mathcal{M}(x, g(y')) - \mathcal{M}^*(x)| \leq \beta \cdot |\mathcal{M}'(f(x), y') - \mathcal{M}'^*(f(x))|$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}' = \min$

Si Π' est ρ-approximable alors Π est $1 + \alpha\beta(\rho - 1)$-approximable.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}' = \max$

Si Π' est ρ-approximable alors Π est 1 - $\alpha\beta(1 - \rho)$-approximable.

Propriétés de la L-réduction

Théorème

Si $\Pi \in$ NPO et $\Pi' \in$ APX et $\Pi \leq_L \Pi'$ alors $\Pi \in$ APX

Théorème

Si $\Pi \in$ NPO et $\Pi' \in$ PTAS et $\Pi \leq_L \Pi'$, alors $\Pi \in$ PTAS

Réduction isofacteur : min min

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \min)$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \min')$ deux problèmes de NPO.
Une réduction isofacteur de Π vers Π', notée $\Pi \leq_I \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \leq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \to \mathcal{S}(x)$, avec $\mathcal{M}(x, g(y')) \leq \beta \cdot \mathcal{M}'(f(x), y')$

Si Π' est ρ-approximable alors Π est $\alpha\beta\rho$-approximable.

Réduction isofacteur : max max

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \max)$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \max')$ deux problèmes de NPO.
Une réduction isofacteur de Π vers Π', notée $\Pi \leq_I \Pi'$, est une double transformation polynomiale f, g et deux réels α, β :

- $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$, avec $\mathcal{M}'^*(f(x)) \geq \alpha \mathcal{M}^*(x)$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \to \mathcal{S}(x)$, avec $\mathcal{M}(x, g(y')) \geq \beta \cdot \mathcal{M}'(f(x), y')$

Si Π' est ρ-approximable alors Π est $\alpha\beta\rho$-approximable.

Propriétés de la réduction isofacteur

Théorème

Si $\Pi \in$ NPO et $\Pi' \in$ APX et $\Pi \leq_I \Pi'$ alors $\Pi \in$ APX

Théorème

Si $\Pi \in$ NPO et $\Pi' \in$ PTAS et $\Pi \leq_I \Pi'$ avec $\alpha = \beta = 1$ de Π vers Π' alors $\Pi \in$ PTAS

Inapproximabilité par GAP

Définition

Il existe une GAP-Réduction du problème de **décision** $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ NP-Complet vers le problème de **minimisation** $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ s'il existe deux réels α et G et une transformation polynomiale $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$:

- si $x \in \mathcal{L}^Y$, $\mathcal{M}'^*(f(x)) < G$;
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout $y \in \mathcal{S}'(f(x))$, $\mathcal{M}'(f(x), y) \geq \alpha G$

Π ne peut être approché avec un rapport α si P $\neq$ NP.

Inapproximabilité par GAP

Définition

Il existe une GAP-Réduction du problème de **décision** $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ NP-Complet vers le problème de **maximisation** $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ s'il existe deux réels α et G et une transformation polynomiale $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$:

- si $x \in \mathcal{L}^Y$, $\mathcal{M}'^*(f(x)) > G$;
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout $y \in \mathcal{S}'(f(x))$, $\mathcal{M}'(f(x), y) \leq \alpha G$

Π ne peut être approché avec un rapport α si P $\neq$ NP.

PTAS-Réduction : min min

Définition

Soient $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ et $\Pi' = (\mathcal{I}', \mathcal{S}', \mathcal{M}', \mathcal{O}')$ deux problèmes de NPO.

Une réduction PTAS de Π vers Π', notée $\Pi \leq_{PTAS} \Pi'$, est une triple transformation f, g, c :

- $f : \mathcal{I} \times]0, 1[\rightarrow \mathcal{I}'$ avec $f(x, \varepsilon)$ calculable en temps polynomial par rapport à $|x|$
- $g : \mathcal{S}'(f(x)) \times]0, 1[\rightarrow \mathcal{S}(x)$, avec $g(y', \varepsilon)$ calculable en temps polynomial par rapport à $|y'|$
- $c :]0; 1[\rightarrow]0; 1[$
- $\frac{\mathcal{M}'(f(x), y')}{\mathcal{M}'^*(f(x))} \leq 1 + c(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\mathcal{M}(x, g(y', \varepsilon))}{M^*(x)} \leq 1 + \varepsilon$

Propriétés de la réduction PTAS

Théorème

Si $\Pi \in$ NPO et $\Pi' \in$ PTAS et $\Pi \leq_{PTAS} \Pi'$ alors $\Pi \in$ PTAS

Notion de problème intermédiaire

Définition

Un problème $\Pi \in \mathcal{C}$ sous la réduction $\leq_R$ est $\mathcal{C}$-complet si pour tout $\Pi' \in \mathcal{C}$, $\Pi' \leq_R \Pi$.

Définition

Une réduction $\leq_R$ préserve l'appartenance à une classe $\mathcal{C}$ si $\Pi \in \mathcal{C}$ et $\Pi' \leq_R \Pi \Rightarrow \Pi' \in \mathcal{C}$.

Notion de problème intermédiaire

Propriété

Si $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$, si Π est $\mathcal{C}$-complet sous une réduction $\leq_R$ préservant l'appartenance à la classe $\mathcal{C}'$ alors $\Pi \notin \mathcal{C}'$.

Définition

Un problème $\Pi \in \mathcal{C}$ est $\mathcal{C}$-intermédiaire vis-à-vis de la classe $\mathcal{C}' \subsetneq \mathcal{C}$ sous la réduction $\leq_R$ préservant l'appartenance à $\mathcal{C}'$ si $\Pi \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{C}'$ et si Π n'est pas $\mathcal{C}$-complet.

Autres réductions

Autres réductions

- réduction AF (rapport différentiel)
- réduction stricte
- réduction AP
- réduction P
- réduction E
- réduction F
- ...

PCP

PCP(r, q)

La classe PCP(r, q) contient tous les problèmes de décision $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}^Y, \mathcal{L}^N)$ tel qu'il existe un algorithme probabiliste $\mathcal{A}$ de vérification tel que :

- $\mathcal{A}$ prend en entrée une instance x de Π et un certificat c de taille polynomiale et répond OUI ou NON.
- $\mathcal{A}$ lit au plus $r(n)$ bits aléatoires
- $\mathcal{A}$ lit au plus $q(n)$ bits de c
- si $x \in \mathcal{L}^Y$, il existe un certificat c tel que $\mathcal{A}(x, c)$ répond OUI avec une probabilité 1
- si $x \in \mathcal{L}^N$, pour tout certificat c tel que $\mathcal{A}(x, c)$ répond NON avec une probabilité au moins 1/2

PCP et NP

Théorème

$\mathrm{NP} = \mathrm{PCP}(0, poly(n))$

Théorème

$\mathrm{NP} = \mathrm{PCP}(O(\log(n)), O(1))$

Conséquences

Corollaire

Max-3SAT, Vertex-Cover, Steiner Tree $\notin$ PTAS si P $\neq$ NP.

Corollaire

$\forall 1 > \varepsilon > 0$, Set Cover ne peut être approché avec un rapport meilleur que $(1 - \varepsilon)\log(n)$ si P $\neq$ NP.

Corollaire

$\forall 1/2 > \varepsilon > 0$ Clique ne peut être approché avec un rapport meilleur que n^{ε} si P $\neq$ NP.