Chapitre 1 : Graphes hamiltoniens

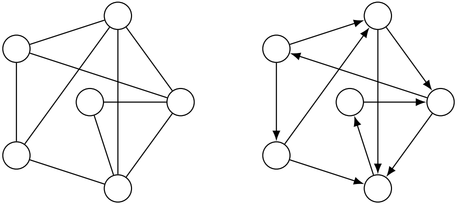
MPRO - Graphes avancés

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2025

Définitions

- Cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) hamiltonien :
  cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) passant une et une seule fois par chaque nœud

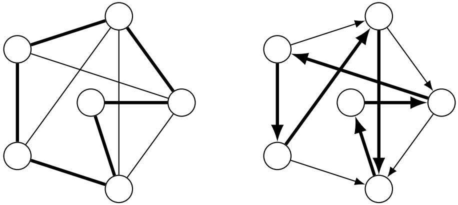


Graphe hamiltonien

Un graphe non orienté (resp. orienté) est hamiltonien s'il possède un cycle (resp. circuit) hamiltonien.

Définitions

- Cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) hamiltonien :
  cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) passant une et une seule fois par chaque nœud



Graphe hamiltonien

Un graphe non orienté (resp. orienté) est <u>hamiltonien</u> s'il possède un cycle (resp. circuit) hamiltonien.

Remarque

Remarque

On ignorera le cas des graphes d'ordre $n = 1$ et $n = 2$.

Objectif du cours

Caractérisation

- Classes de graphes hamiltoniens
- Conditions nécessaires et suffisantes d'hamiltonicité
- Caractérisation via problème d'optimisation

Aspects algorithmiques

- Classes de graphes où le problème est NP-Complet
- Classes de graphes où le problème est polynomial

Plan

Classes triviales de graphes hamiltoniens

Pour démarrer facile

- Pour $p \geq 3$, K_p est hamiltonien.
- Pour $p \geq 2$, $K_{p,p}$ est hamiltonien.
- Pour $k \geq 3$, C_k est hamiltonien.

Classes triviales de graphes hamiltoniens

Graphe planaire extérieur

Un graphe $G = (V, E)$ est planaire extérieur (ou outer-planar) s'il est planaire et si chaque nœud appartient à la face extérieure.

Théorème facile

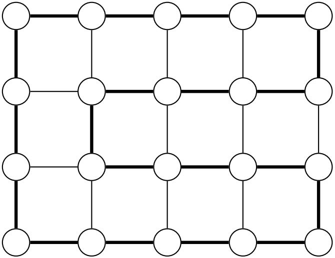
Un graphe planaire extérieur est hamiltonien si et seulement s'il est 2-connexe.

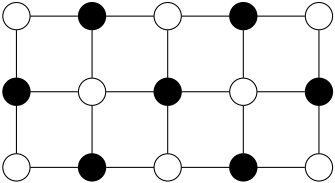
Grilles hamiltoniennes

Théorème

Une grille de taille $m \times n$ est hamiltonienne si et seulement si

$$m > 1,\ n > 1 \text{ et } m \text{ ou } n \text{ est pair.}$$



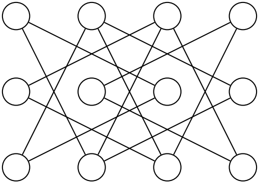


Problème du cavalier

Graphe du problème du cavalier

Le graphe Chessboard $CB(m,n) = (V,E)$ possède $n \times m$ nœuds étiquetés $u_{ij} \in V$ pour $i \in [\![1;m]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$.

$$(u_{ij}, u_{kl}) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} & |i-k| = 2 \text{ et } |j-l| = 1 \\ \text{ou} & |i-k| = 1 \text{ et } |j-l| = 2 \end{cases}$$



Problème du cavalier

Théorème de Schwenk

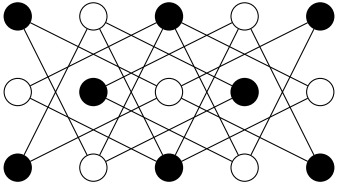
Soit $m \leq n$, alors $CB(m, n)$ est hamiltonien si et seulement si

- m ou n est pair
- et $m \notin \{1, 2\}$
- et $m \neq 4$
- et $n \neq 4$
- et $m \neq 3$ ou $n \notin \{6, 8\}$

Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

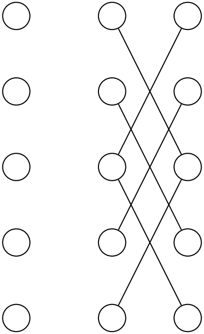
(...) m ou n est pair (...)



Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

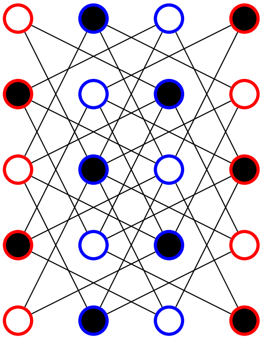
$(\dots)\ m \notin \{1,2\}\ (\dots)$



Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

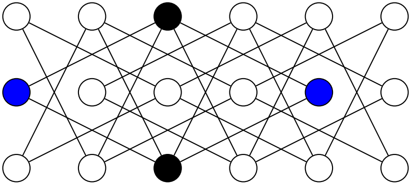
$(\ldots)$ $m \neq 4$ et $n \neq 4$ $(\ldots)$



Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

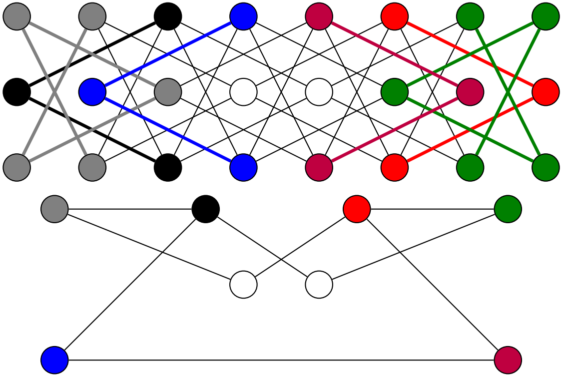
$(\ldots)$ $m \neq 3$ ou $n \neq 6$ $(\ldots)$



Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

(...) $m \neq 3$ ou $n \neq 8$ (...)



Problème du cavalier

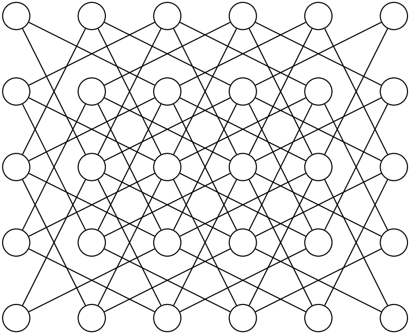
Preuve du théorème de Schwenk

$CB(i, j)$ sont Hamiltonien si $(i, j) \in$

- $(3, 10)$, $(3, 12)$,
- $(5, 6)$, $(5, 8)$,
- $(6, 6)$, $(6, 7)$, $(6, 8)$, $(6, 7)$
- $(7, 8)$
- $(8, 8)$

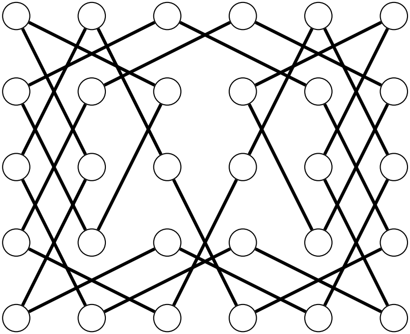
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



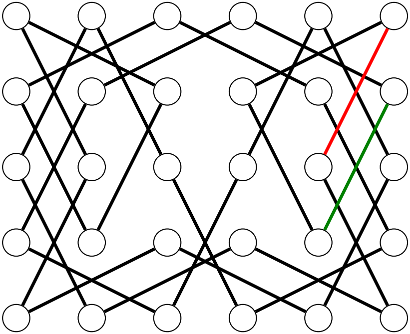
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



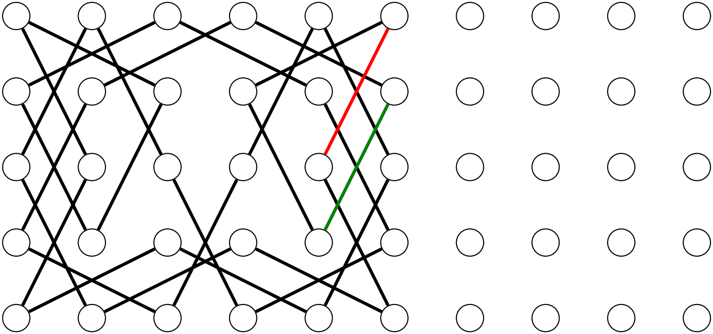
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



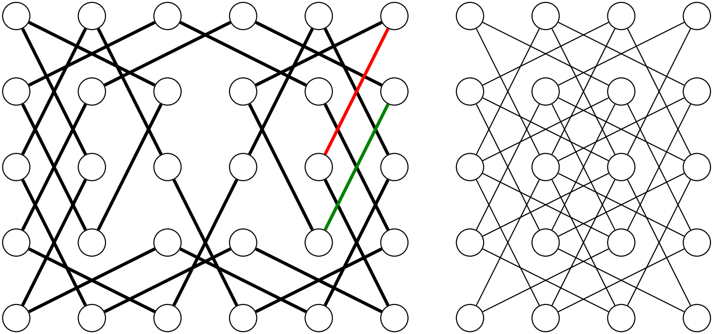
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



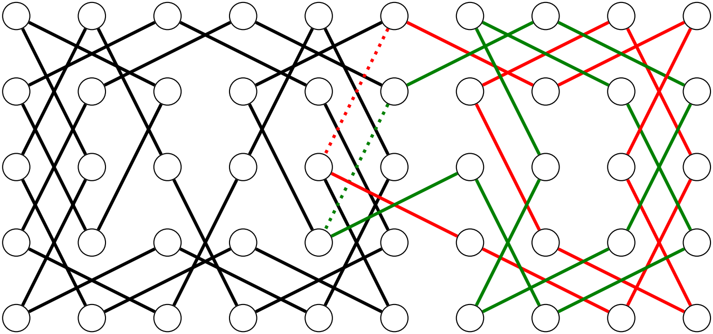
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



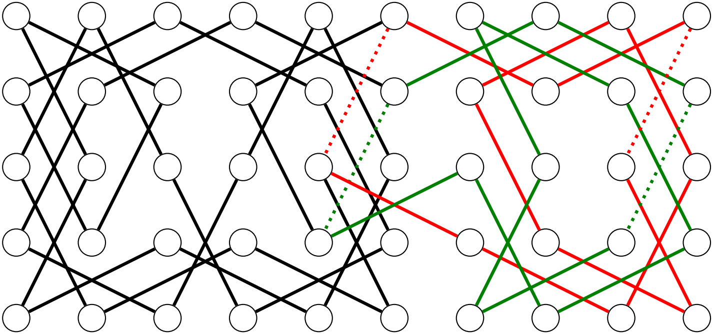
Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6)$



Problème du cavalier

$CB(5,6) \rightarrow CB(9,6) \rightarrow CB(5+4\cdot k,6)$



Problème du cavalier

Preuve du théorème de Schwenk

Techniques similaires pour

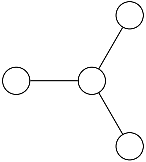
$$CB(m, n) \to CB(m+4, n)$$

$$CB(m, n) \to CB(m, n+4)$$

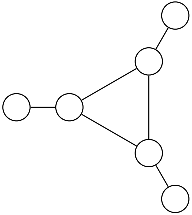
Cas particulier

Théorème de Duffus, Jacobson et Gould

Un graphe 2-connecté sans griphe et sans filet induits est hamiltonien.



Griffe



Filet

Cas orienté

Tournoi

Un tournoi est un graphe $G = (V, A)$ orienté tel que, pour tout $u, v \in V$ avec $u \neq v$

$$(u, v) \in A \text{ xor } (v, u) \in A$$

Théorème de Camion

Si G est un tournoi est hamiltonien si et seulement s'il est fortement connexe.

Caractérisation des graphes hamiltoniens

Remarque

A ce jour, il n'existe aucune caractérisation des graphes hamiltoniens (autre que leur définition).

Plan

Condition suffisante : degré

Théorème d'Ore (non orienté)

Soit $G = (V, E)$ d'ordre n. Si, pour tout $u, v \in V$ tel que $(u, v) \notin E$, $deg(u) + deg(v) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Théorème d'Ore (variante orientée)

Soit $G = (V, A)$ orienté d'ordre n. Si, pour tout $u, v \in V$ tel que $(u, v) \notin A$, $deg^+(u) + deg^-(v) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Condition suffisante : Fermeture de graphe

Définition

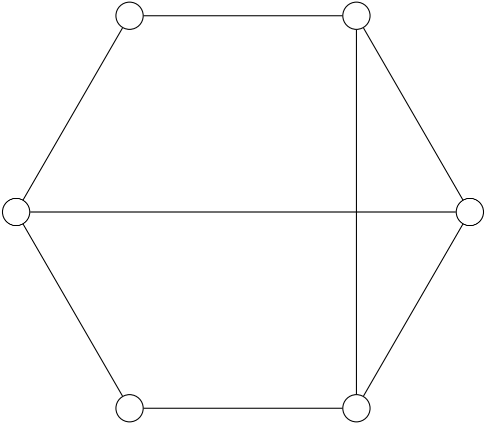
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. La fermeture de G est le graphe $CL(G)$ obtenu en appliquant récursivement la transformation suivante :

Soient u et v tel que $(u, v) \notin E$ et $deg(u) + deg(v) \geq n$, ajouter (u, v) à E.

Théorème de Bondy et Chvátal

G est hamiltonien si et seulement si $CL(G)$ est hamiltonien.

Exemple



Condition suffisante : Connectivité et stabilité

Définition

$\kappa(G)$: connectivité de G
$\alpha(G)$: nombre de stabilité de G

Théorème de Chvátal et Erdös

Si $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ alors G est hamiltonien.

Condition suffisante : Carré et cube d'un graphe

Définition

Soit $G = (V, E)$. Alors G^k est le graphe $G^k = (V, F)$ avec

$$(u, v) \in F \leftrightarrow d(u, v) \leq k$$

où $d(u, v)$ est la distance entre u et v dans G.

Théorème de Fleischner (ou de Riha ou de Georgakopoulos ou encore de Chartrand, Hobbs, Jung, Kapoor et Nash Williams)

Si G est 2-connexe, alors G^2 est hamiltonien.

Théorème de Sekanina ou de Karaganis

Si G est connexe, alors G^3 est hamiltonien.

Condition suffisante : Linegraphs

Definition

On note $L^0(G) = G$ et $L^k(G)$ le linegraph de $L^{k-1}(G)$.

Théorème de Chartrand et Wall

Si G est connexe et de degré minimum 3, alors $L^2(G)$ est hamiltonien.

Théorème

Si G est connecté, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $L^k(G)$ est hamiltonien.

Condition suffisante : t-tough

Definition

Soit $t \geq 1$, soit $G = (V, E)$, alors $k(G)$ est le nombre de composantes connexes de G. Un graphe G est t-tough si, pour tout $S \subsetneq V$ non vide

$$t \cdot k(G - S) \leq |S|$$

Definition

Soit $t \geq 1$, soient $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ les degrés de G, alors G vérifie $P(t)$ si pour tout $i < n/2$, si $d_i \leq i$ alors $d_{n-i+t} \geq n - i$.

Théorème de Hoang et Robin

Pour tout $t \leq 4$, si G est t-tough et $P(t)$ alors G est hamiltonien.

Plan

Condition nécessaire d'hamiltonicité

Définition

Soit $G = (V, E)$, alors $k(G)$ est le nombre de composantes connexes de G.

Théorème

Si $G = (V, E)$ est hamiltonien alors pour tout $S \subsetneq V$ non vide

$$k(G - S) \leq |S|$$

Plan

Problème d'optimisation : TSP

Le problème ~~Télécom Sud-Paris~~ du voyageur de Commerce (TSP)

Soient un graphe complet $H = (V, E)$ et $\omega : E \to \mathbb{N}$, trouver un cycle hamiltonien dans G de poids minimum.

Construction d'une instance (H, ω) à partir d'un graphe $G = (W, F)$ quelconque

- compléter le graphe
- $\omega(e) = 0$ si $e \in F$
- $\omega(e) = 1$ sinon

Idée

G est hamiltonien si et seulement si la solution optimale est nulle.

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une politique est une fonction f telle que :

- $f : V \times E \to [0, 1]$
- Pour tout $u \in V$, $\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, (u, v)) = 1$

Chaque politique f est une chaîne de Markov.

Définition

- $G(f)$: matrice de transition de la chaîne.
- J : matrice ne contenant que des 1
- $W(f) = I - G(f) + \frac{1}{n} J$

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Théorème de Borkar, Ejov, Filar et Nguyen

G est hamiltonien si et seulement si

$$\max_{\text{politique } f} det(W(f)) = n$$

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Politique déterministe

- Une politique est déterministe si chaque ligne de $G(f)$ contient un unique 1.
- Une politique f est hamiltonienne si elle et déterministe et si $G(f)$ est la matrice d'ajacence d'un circuit hamiltonien.

Lemmes

- Si f est hamiltonienne, alors $det(W(f)) = n$.
- Si f est déterministe non hamiltonienne, alors $det(W(f)) < n$.
- Si f n'est pas déterministe, il existe une politique déterministe f' telle que $det(W(f)) \leq det(W(f'))$.

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Lemme

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de $G(f)$, avec $\lambda_n = 1$. alors

$$det(W(f)) = \prod_{i=1}^{n-1}(1 - \lambda_i)$$

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Lemme

Si $G(f)$ est la matrice d'adjacence d'un graphe contenant deux circuits disjoints

$$det(W(f)) = 0$$

Preuve : $G(f)$ a deux fois la valeur propre 1.

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Lemme

Si $G(f)$ est la matrice d'adjacence d'un circuit hamiltonien

$$det(W(f)) = n$$

Pistes pour la preuve :

- $P(X) = \det(XI - G(f)) = X^n - 1$
- $det(W(f)) = (P(X)/(X-1))(1)$

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Lemme

Si $G(f)$ est la matrice d'adjacence d'un graphe contenant un seul circuit de taille $k < n$

$$det(W(f)) = k$$

Pistes pour la preuve :

- 0 est valeur propre de $G(f)$ multiplicité $n - k + 1$
- $det(W(f)) = det(W(f'))$ où $G(f')$ est la matrice du sous-graphe restreint au circuit.

Problème d'optimisation : Chaînes de Markov

Lemme

Si f n'est pas déterministe, il existe une politique déterministe f' telle que

$$det(W(f)) \leq det(W(f'))$$

Piste pour la preuve

- Considérer une ligne de $G(f)$ contenant a et b avec $0 < a, b < 1$
- Soit f_ν où a devient ν et b devient $a + b - \nu$
- Montrer que $det(W(f)) \leq \max(det(W(f_0)), det(W(f_{a+b})))$
- Procéder par récurrence

Plan

NP-Complétude

Définition

$\preccurlyeq$: réduction polynomiale de Karp

Problème de décision

- $H_{\bigcirc}$: recherche d'un cycle hamiltonien
- $H_{\subset}$: recherche d'une chaîne hamiltonienne
- $H_{\subset,u,v}$: recherche d'une chaîne hamiltonienne dont les extrémités sont données
- $H_{\circlearrowleft}$: recherche d'un circuit hamiltonien
- $H_{\curvearrowright}$: recherche d'un chemin hamiltonien
- $H_{\curvearrowright,u,v}$: recherche d'un chemin hamiltonien dont les extrémités sont données

Appartenance à NP

Théorème

$H_{\bigcirc}$, $H_{\subset}$, $H_{\subset,u,v}$, $H_{\circlearrowleft}$, $H_{\curvearrowright}$, et $H_{\curvearrowright,u,v}$ sont dans NP.

Réductions directes entre problèmes hamiltoniens

- $H_{\subset,u,v} \preccurlyeq H_{\subset} \preccurlyeq H_{\bigcirc} \preccurlyeq H_{\subset,u,v}$
- $H_{\curvearrowright,u,v} \preccurlyeq H_{\curvearrowright} \preccurlyeq H_{\circlearrowleft} \preccurlyeq H_{\curvearrowright,u,v}$
- $H_{\bigcirc} \preccurlyeq H_{\circlearrowleft} \preccurlyeq H_{\bigcirc}$

$\Rightarrow$ Prouver la NP-Complétude d'un problème suffit.

NP-Complétude

Au choix

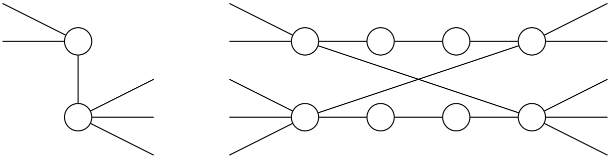
- Vertex Cover $\preccurlyeq H_{\bigcirc}$
- SAT $\preccurlyeq H_{\circlearrowleft}$

NP-Complétude : Cas parfait

Théorème de Krishnamoorthy

$H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est biparti.

Preuve : $H_{\bigcirc} \preccurlyeq H_{\bigcirc} - \text{Biparti}$



Corollaire

$H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est parfait.

NP-Complétude : Cas planaire régulier

Théorème (Garey Johnson Tarjan)

- $H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est planaire, cubique et 3-connecté.
- $H_{\circlearrowleft}$ est NP-Complet même si G est planaire et cubique.

Corollaires

- $H_{\subset}(u, v)$ est NP-Complet même si G est planaire, cubique et 3-connecté.
- $H_{\subset}$ est NP-Complet même si G est planaire, cubique.
- $H_{\curvearrowright}(u, v)$ est NP-Complet même si G est planaire, cubique et 3-connecté.
- $H_{\curvearrowright}$ est NP-Complet même si G est planaire, cubique.

NP-Complétude : Cas planaire régulier

Théorème de Picouleau

- $H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est planaire et 4-régulier.
- $H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est planaire et 5-régulier.

NP-Complétude : Cas régulier

Théorème de Picouleau

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, $H_{\bigcirc}$ est NP-Complet même si G est k-régulier.

Plan

Largeur d'arbre

Définition

Une décomposition en arbre de $G = (V, E)$ est un arbre $T : (V_T, E_T)$ tel que

- $V_T \subset 2^V$
- Pour tout $(v, w) \in E$, il existe $u \in V_T$ tel que $v \in u$ et $w \in u$
- Pour tout $v \in V$, $\{u | v \in u\}$ induit un sous-arbre de T

La largeur de $w(T)$ est $\max_{u \in V_T} |u| - 1$.

Définition

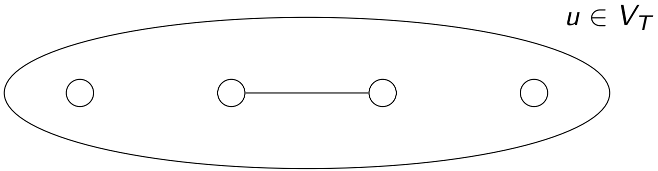
La largeur d'arbre de G est $tw = \min (w(T) | T \text{ décomposition de } G)$

Largeur d'arbre

Théorème de Downey et Fellows

Il existe un algorithme en $O(n \cdot f(tw))$ qui résout $H_{\bigcirc}$.

Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



Idée principale

Enumérer des fonctions $u \to [\![1; k(tw)]\!]$ en $k(tw)^{tw}$

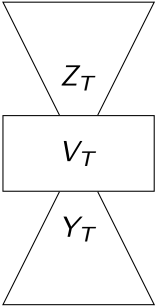
Par exemple :

- les sous ensembles de u : $k(tw) = 2$
- les partitions : $k(tw) = tw$

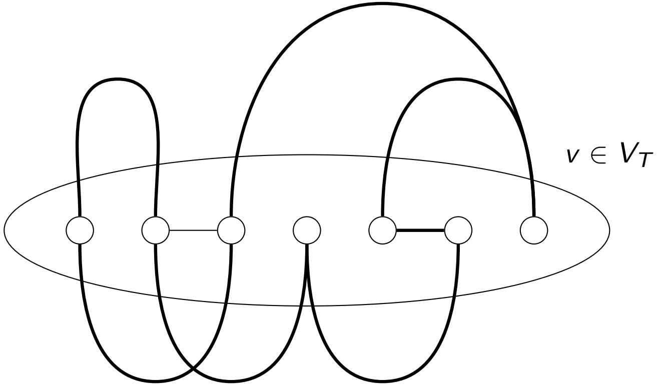
Largeur d'arbre : idée de l'algorithme

Définition de Y_T, Z_T et G_T

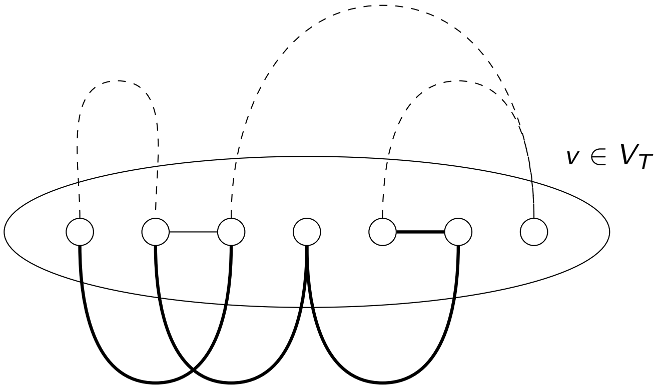
- Y_T : descendants de V_T (y compris V_T)
- $Z_T = T \backslash Y_T \cup \{V_T\}$
- $G_T = \bigcup_{u \in Y_T} u$



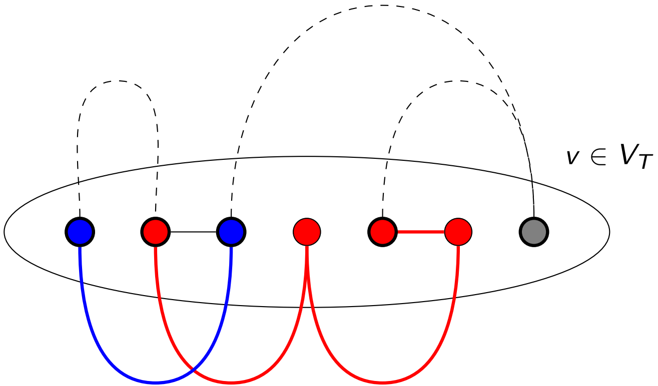
Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



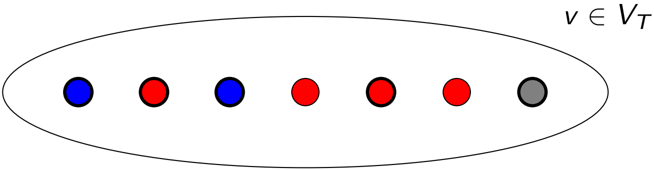
Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



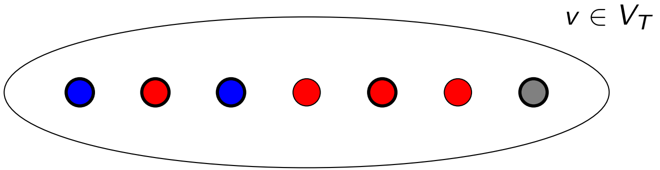
Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



Largeur d'arbre : idée de l'algorithme



Ce qu'on cherche

Connaissant

- une partition $P = (P_1, P_2, \ldots, P_q)$ de u
- pour tout $i \leq q$, 2 nœuds e_i, f_i de u_i ($e_i = f_i \Leftrightarrow |u_i| = 1$)

Existe-t-il dans G_T q chaînes disjointes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ où

- $Q_i \cap u = P_i$
- les extrémités de Q_i sont e_i et f_i

Largeur d'arbre : idée de l'algorithme

Ce qu'on cherche

Connaissant

- une partition $P = (P_1, P_2, \dots, P_q)$ de u
- pour tout $i \leq q$, 2 nœuds e_i, f_i de u_i ($e_i = f_i \Leftrightarrow |u_i| = 1$)

Existe-t-il dans G_T q chaînes disjointes $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$ où

- $Q_i \cap u = P_i$
- les extrémités de Q_i sont e_i et f_i

- Algo récursif sur T
- Complexité $O(|T| \cdot tw^{tw} \cdot 2^{tw})$

Graphe d'intervale

Définition

Un graphe d'intervale $G = (V, E)$ est un graphe tel que

- pour chaque $v \in V$, il existe un intervale entier I_v
- $(u, v) \in E \Leftrightarrow I_u \cap I_v \neq \emptyset$

Théorème de Keil

$H_{\bigcirc}$ est polynomial dans le cas où G est un graphe d'intervale

Conclusion

- Problème sans caractérisation générale
- Problème largement étudié dans de très nombreuses classes de graphes
- Résultats et techniques variées