Chapitre 2 : Graphes eulériens

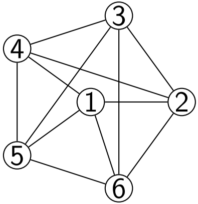
MPRO - Graphes avancés

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2024

Définitions

- Cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) eulérien :
  cycle (resp. chaîne, circuit, chemin) passant une et une seule fois par chaque arête/arc



$$1 - 2 - 3 - 6 - 2 - 4 - 5 - 1 - 4 - 3 - 5 - 6 - 1$$

Graphe hamiltonien

Un graphe non orienté (resp. orienté) est eulérien s'il possède un cycle (resp. circuit) eulérien.

Remarque

Remarque

On ignorera le cas des graphes d'ordre $n = 1$ et $n = 2$.

Résultat connu

Théorème

Un graphe est eulérien si et seulement s'il est connexe et si tous ses nœuds sont de degré pair.

Variantes

Un graphe connexe possède

- une chaîne eulérienne ssi exactement 2 nœuds de degré impair.
- un circuit eulérien ssi pour tout $v \in V$, $d^-(v) = d^+(v)$.
- un chemin eulérien ssi pour tout $v \in V$ sauf deux u et w, $d^-(v) = d^+(v)$.
  De plus $d^-(u) = d^+(u) + 1$ et $d^-(w) + 1 = d^+(w)$.

Problème du postier chinois

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, le problème du postier chinois consiste à trouver un cycle passant par toutes les arêtes au moins une fois, possiblement plusieurs fois, et de taille minimum.

Théorème

Ce problème est polynomial.

T-joint

Définition

Soit $G = (V, E)$ et $F \subset E$, alors $G[F] = (V, F)$.

Définition

Connaissant un graphe $G = (V, E)$ et $T \subset V$, avec $|T|$ pair, un T-joint est un ensemble d'arêtes $F \subset E$ telles que pour tout $v \in V$, $\deg(v)$ est impair dans $G[F]$ si et seulement si $v \in T$.

Lemme

Soient T les nœuds de G de degré impair. Alors trouver le T-joint de taille minimum est équivalent à résoudre le problème du postier chinois.

T-joint de taille minimum

Lemme

Connaissant un graphe $G = (V, E)$ et $T \subset V$, trouver un T-joint de taille minimum est un problème polynomial.

Idée de preuve : Trouver un couplage parfait de poids minimum dans le graphe des plus court chemins reliant T.

Généralisation

Que se passe-t-il si on ajoute des poids aux arêtes du problème de postier chinois ?

Conclusion

- Problème avec caractérisation générale
- Généralisation polynomiale