Quelques notes sur la caractérisation par chaîne de Markov

Graphes avancés
Dimitri Watel - ENSIIE

2024

Ce document recense quelques notes sur les preuves de la caractérisation des circuits hamiltoniens par chaîne de Markov. On peut noter que d'autres caractérisations existent et sont présentées dans le livre associé dans les sources du cours, en particulier une caractérisation par la trace de matrices, une caractérisation via la période des états de la chaîne et enfin, une caractérisation en utilisant des processus de décision markovien qui mènent à une modélisation à base de programmation mathématiques qui peut être utilisée ensuite avec des solveurs classiques.

1 Définition

On considère un graphe G orienté dans lequel on cherche un circuit hamiltonien. On attribue à chaque arc de G une probabilité de sorte que la somme des probabilités sortante d'un nœud soit égale à 1. On obtient ainsi une chaîne de Markov. On note f le vecteur de probabilité (autrement appelée la *politique*).

On note

- $G(f)$ la matrice de transition de la chaîne.
- $e = {}^t(1111\dots1)$ le vecteur constitué que de 1.
- $J = e^te$ la matrice ne contenant que des 1
- $W(f) = I - G(f) + \frac{1}{n}J$

On veut montrer que $\max_f \det W(f) = n$ si et seulement si G est hamiltonien.

2 Propriétés de $W(f)$

$G(f)$ possède n valeurs propres complexes $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$. Il peut y avoir des valeurs propres de multiplicité supérieure à 1. On peut noter que 1 est toujours valeur propre car

$$G(f) \cdot e = e$$

Sans perte de généralité, on impose $\lambda_n = 1$.

Lemme 2.1. *Les valeurs propres de $W(f)$ sont $\mu_i = 1 - \lambda_i$ pour $i < n$ et $\mu_n = 1$.*

Proof. (Crédit : Chistophe Mouilleron) Connaissant le polynôme caractéristique $P(X)$ de $G(f)$, on obtient le polynôme caractéristique $Q(X)$ de $W(f)$ en utilisant le *Matrix determinant lemma* (`https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_determinant_lemma`). On obtient le polynome suivant

$$Q(X) = (-1)^n P(1 - X)(1 - \frac{1}{X})$$

Puisque 1 est valeur propre de $G(f)$ alors $P(1) = 0$. Donc $P(1 - X)/X$ est bien un polynome. On obtient alors immédiatement que si 1 a pour multiplicité k dans $P(X)$ alors 0 a pour multiplicité $k - 1$ dans $Q(X)$; si 0 a pour multiplicité k dans $P(X)$ alors 1 a pour multiplicité $k + 1$ dans $Q(X)$ et si $\lambda \notin 0, 1$ a pour multiplicité k dans $P(X)$ alors $1 - \lambda$ a pour multiplicité k dans $Q(X)$. □

Corollaire 2.1. $\det(W(f)) = \prod_{i=1}^{n-1}(1 - \lambda_i)$.

3 Déterminant de $W(f)$ et circuit hamiltonien

Une politique f est déterministe, si pour chaque nœud v, il y a un arc sortant de v avec une probabilité 1. Une politique déterministe correspond à un sous-graphe de G où chaque nœud a un arc sortant.

3.1 Deux circuits

Lemme 3.1. *Si f est déterministe et correspond à un sous graphe contenant au moins 2 circuits disjoints alors* $\det(W(f)) = 0$.

Proof. $G(f)$ possède deux fois la valeur propre 1 (le vecteur e et un vecteur e' où les composantes correspondant aux nœuds du circuit sont égales à 1, et 0 pour les autres nœuds). Le corollaire 2.1 donne le résultat souhaité. □

3.2 Un circuit hamiltonien

Lemme 3.2. *Si f est déterministe et correspond à un circuit hamiltonien, alors* $\det(W(f)) = n$.

Proof. Puisque f correspond à un cycle hamiltonien, alors $G(f)$ est une matrice dont le polynome caractéristique est $X^n - 1$. En effet, on peut faire le calcul pour la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{pmatrix}$$

On argumente ensuite que le polynome caractéristique de $G(f)$ ne change pas en permutant des vecteurs de la base de $G(f)$.

(La suite est une idée de M Rolland qui simplifie la preuve du livre)

Si $P(X)$ est le polynome caractéristique de $G(f)$, on a $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. On peut noter que $\det(W(f)) = P(X)/(X-1)$ évalué en $X = 1$. Cela implique que

$$\det(W(f)) = \left(\frac{X^n - 1}{X - 1}\right)(1) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} X^n\right)(1) = n$$

□

3.3 Un seul circuit non hamiltonien

Lemme 3.3. *Si f est déterministe et correspond à un sous graphe contenant exactement 1 circuit non hamiltonien de taille k alors* $\det(W(f)) = k$.

Proof. Considérons une permutation des vecteurs de base de sorte que la matrice $G(f)$ soit réoganisée comme suit :

- les k premiers vecteurs sont les nœuds du circuit, dans l'ordre

- les autres vecteurs sont organisés selon un tri topologique. On peut noter qu'aucun nœud correspondant à ces vecteurs n'est successeur du circuit car chaque nœud du graphe a au plus un arc entrant. Et puisque le graphe n'a qu'un seul circuit alors ces nœuds forment un DAG on peut donc bien parler de tri topologique.

On obtient donc une matrice $G(f)$ comme suit:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ \hline & & & & & 0 & ? & ? & \cdots & ? \\ & & & & & 0 & 0 & ? & \cdots & ? \\ & & ? & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & ? \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

Son polynome caractéristique est

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} X & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & X & -1 & \cdots & 0 & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & X & & & & & \\ & & & & & X & ? & ? & \cdots & ? \\ & & & & & 0 & X & ? & \cdots & ? \\ & & ? & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & ? \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \cdots & X \end{array}\right|$$

Puisque la matrice est triangulaire par bloc avec des blocs carrés sur la diagonale, son déterminant est le produit des déterminants de la diagonale.

Le déterminant du premier bloc est $X^k - 1$ et le second est X^{n-k}.

Donc $G(f)$ a pour valeur propre 0 avec une multiplicité $n-k$. Les autres valeurs propres sont les valeurs propres $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots, \Lambda_k$ du cycle hamiltonien de taille k. Notons qu'une de ces valeurs propre est $\lambda_n = 1$ et notons sans perte de généralité $\Lambda_k = 1$.

Donc $\det(W(f)) = \prod_{i=1}^{k-1}(1 - \Lambda_i) = k$ en utilisant la preuve du Lemme précédent.

□

3.4 Politique non déterministe

Lemme 3.4. *Si f est non déterministe alors il existe f' déterministe telle que* $\det(W(f')) \geq \det(W(f))$.

Proof. Considérons n'importe quelle ligne contenant au moins deux cases a et b non nulles. On a donc $0 < a+b \leq 1$. On va montrer qu'il existe une politique f' contenant un 0 de plus que f dans la matrice $G(f)$ vérifiant la propriété recherchée. Par récurrence, on montre ainsi qu'il existe une politique déterministe meilleure ou équivalente à f.

$$G(f) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a & \cdots & b & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Considérons l'ensemble des politiques f_v où $v \in [0; a+b]$ dont la matrice de transition est la suivante

$$G(f_v) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & v & \cdots & a+b-v & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

On peut noter que $f = f_a$. On peut aussi remarquer que $\det(W(f_v))$ est linéaire en v. En effet,

$$\det(W(f_v)) = \det \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -v+\frac{1}{n} & \cdots & -a-b+v+\frac{1}{n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Toutes les autres cases de la matrices ne dépendent pas de v. En calculant le déterminant avec la formule classique de la somme des produits élément - commatrice de la ligne contenant a et b, on obtient bien une fonction linéaire en v.

Donc cette fonction atteint son maximum aux bornes $v = 0$ ou $v = a + b$. Dans les deux cas, la politique obtenue possède un 0 de plus que f. $\square$