

# Chapitre 2 : Machines de Turing

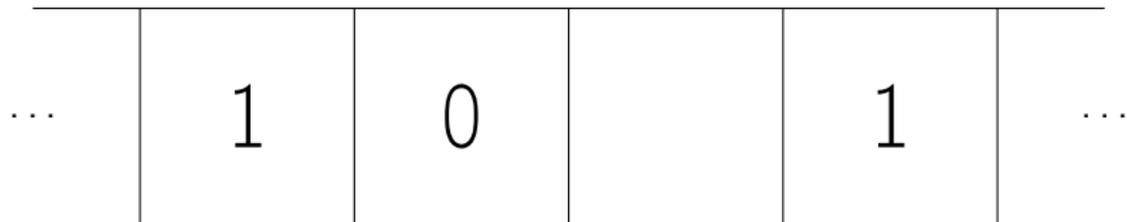
## ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel ([dimitri.watel@ensiie.fr](mailto:dimitri.watel@ensiie.fr))

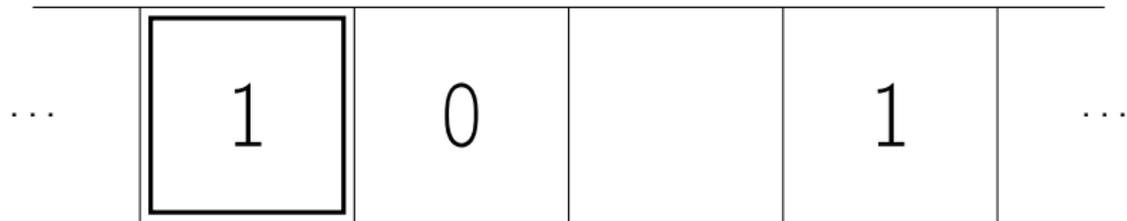
2022

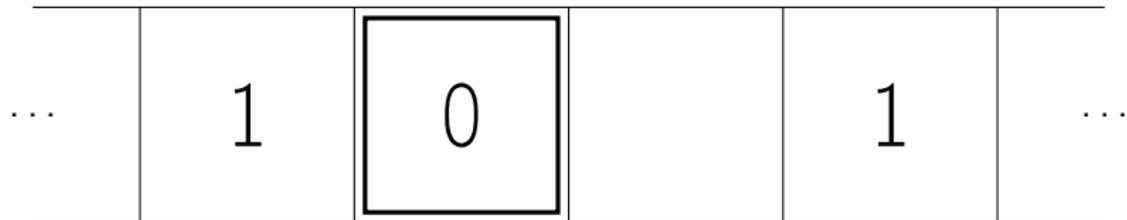
# Machine de Turing

# Machine de Turing - la bande

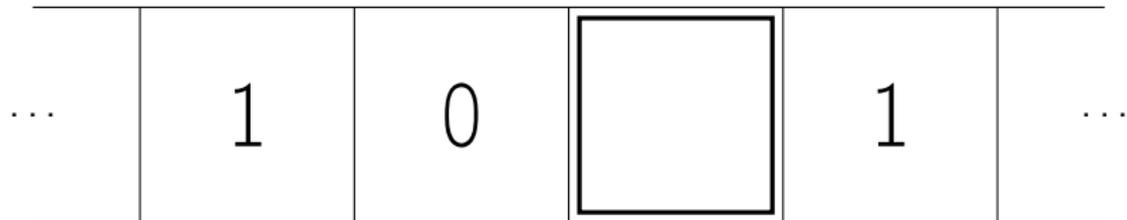


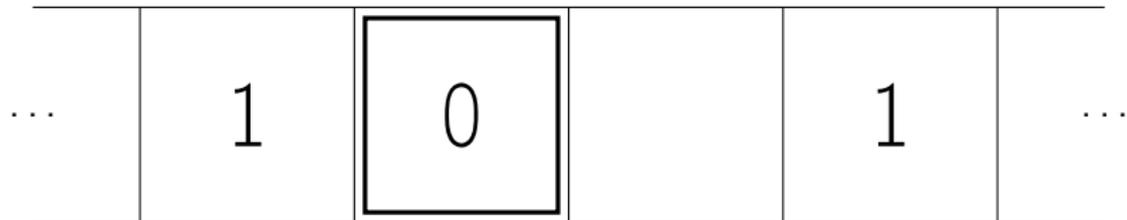
# Machine de Turing - la tête

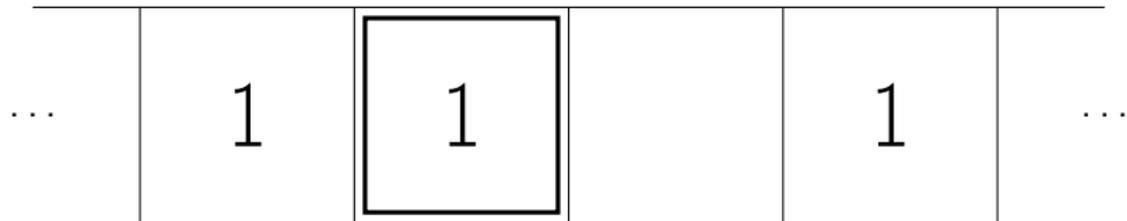




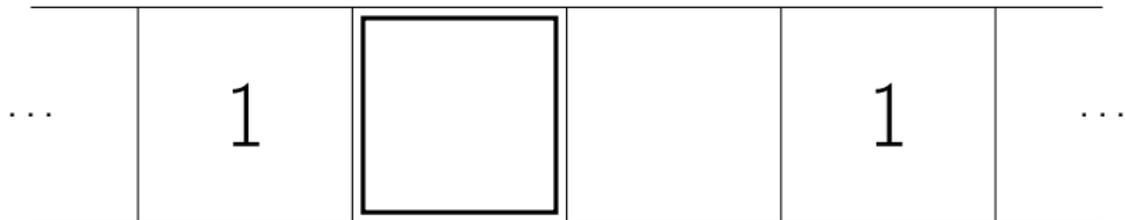
# Machine de Turing - la tête



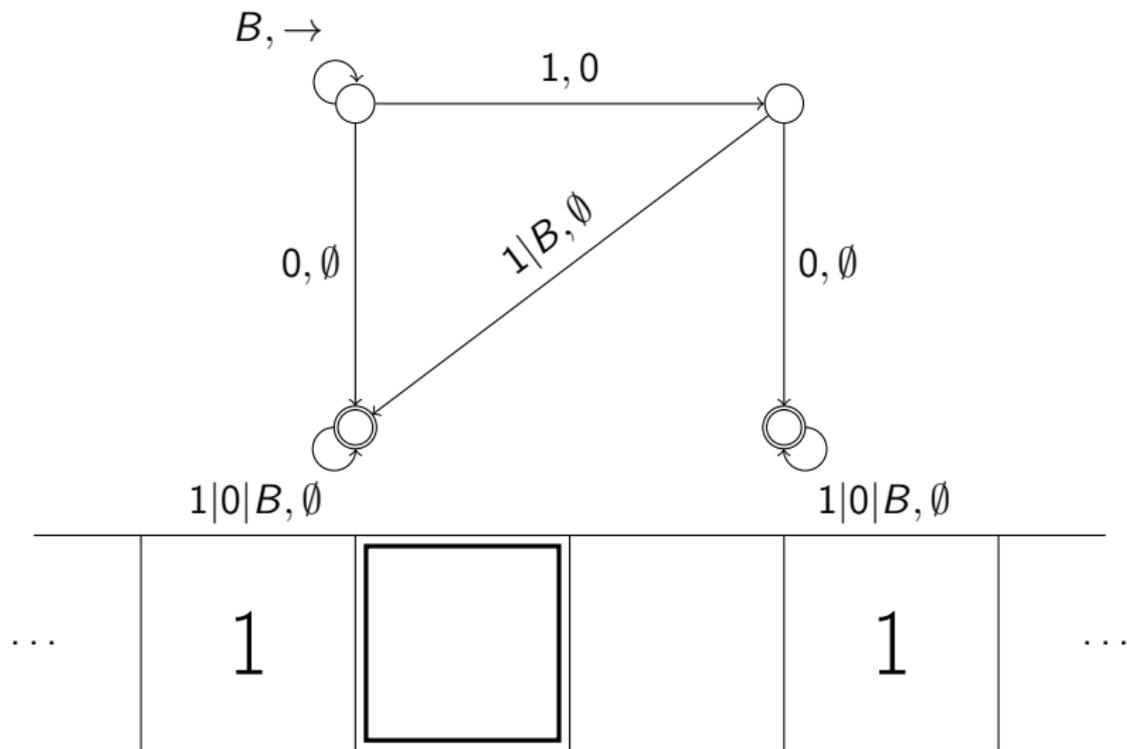




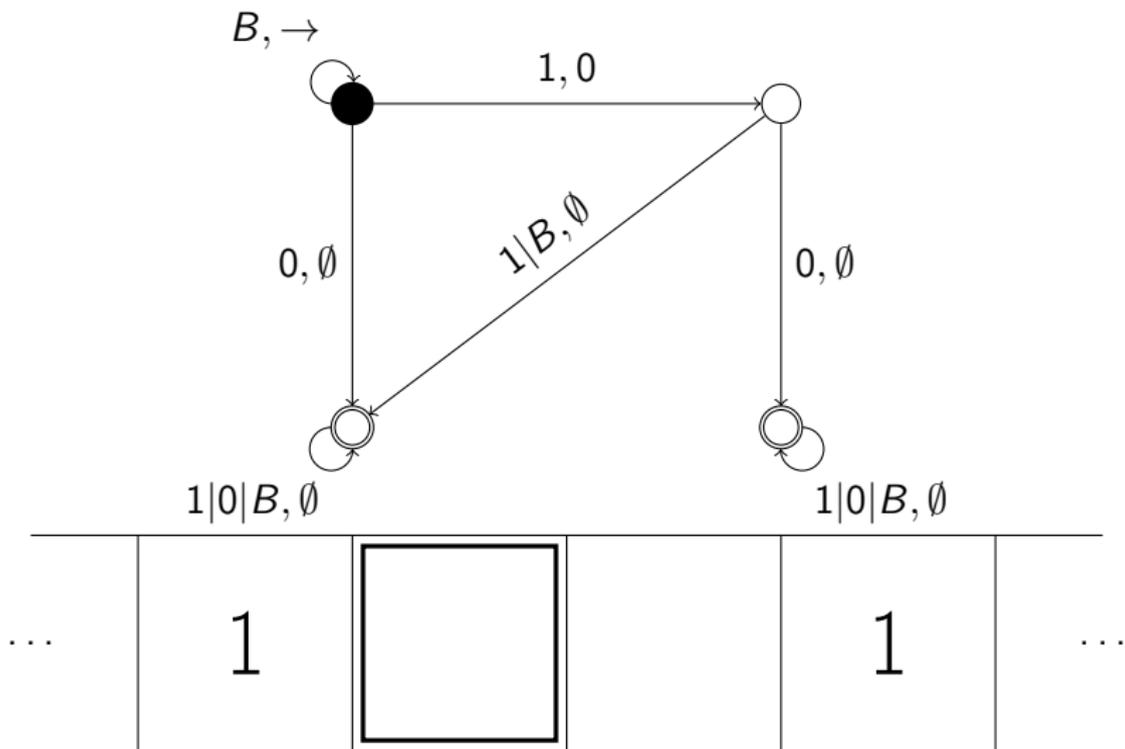
# Machine de Turing - la tête



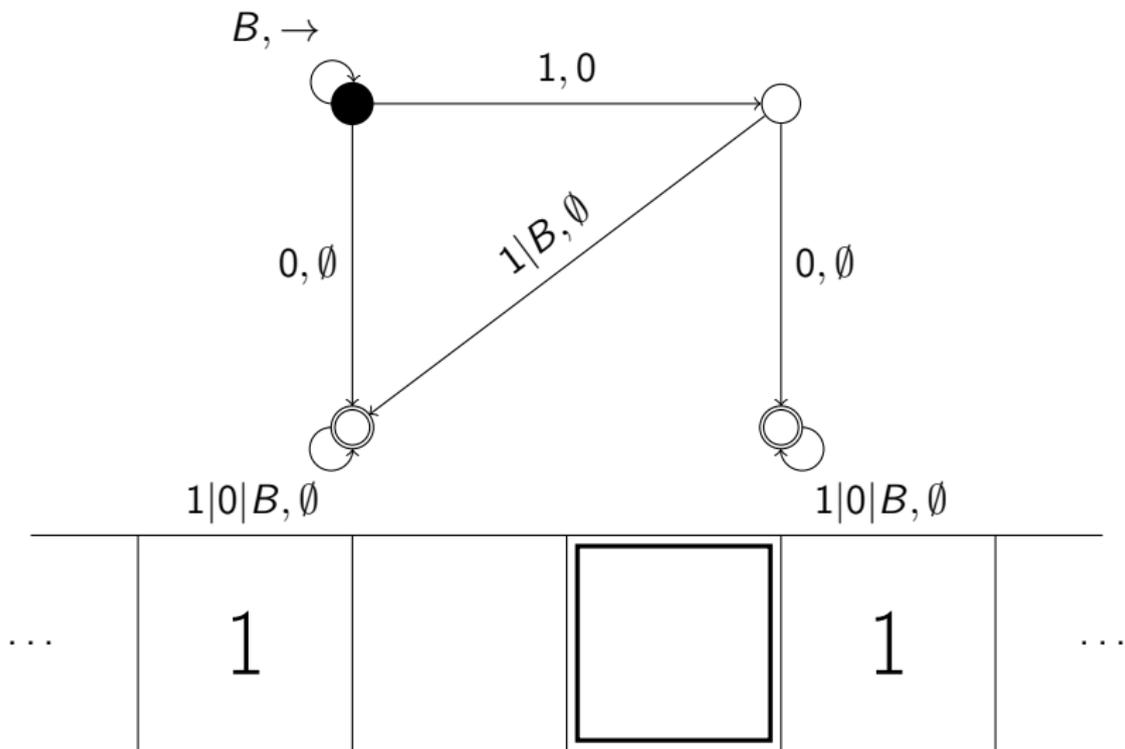
# Machine de Turing - le graphe d'états



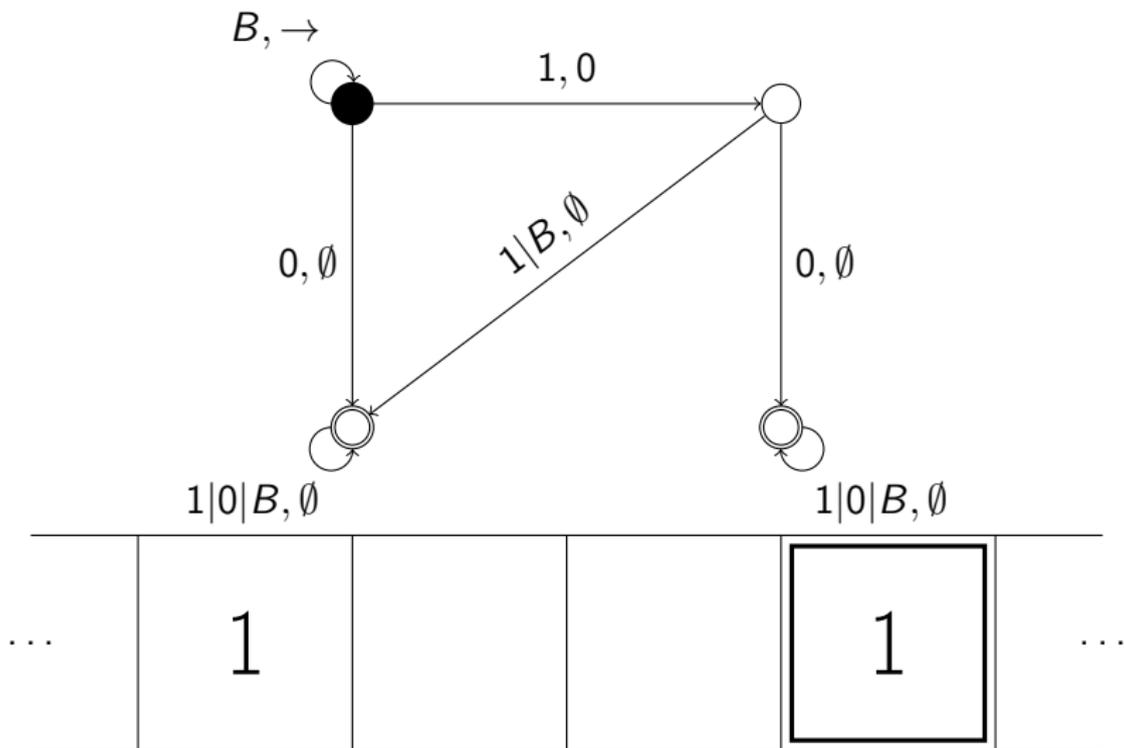
# Machine de Turing - le registre d'état



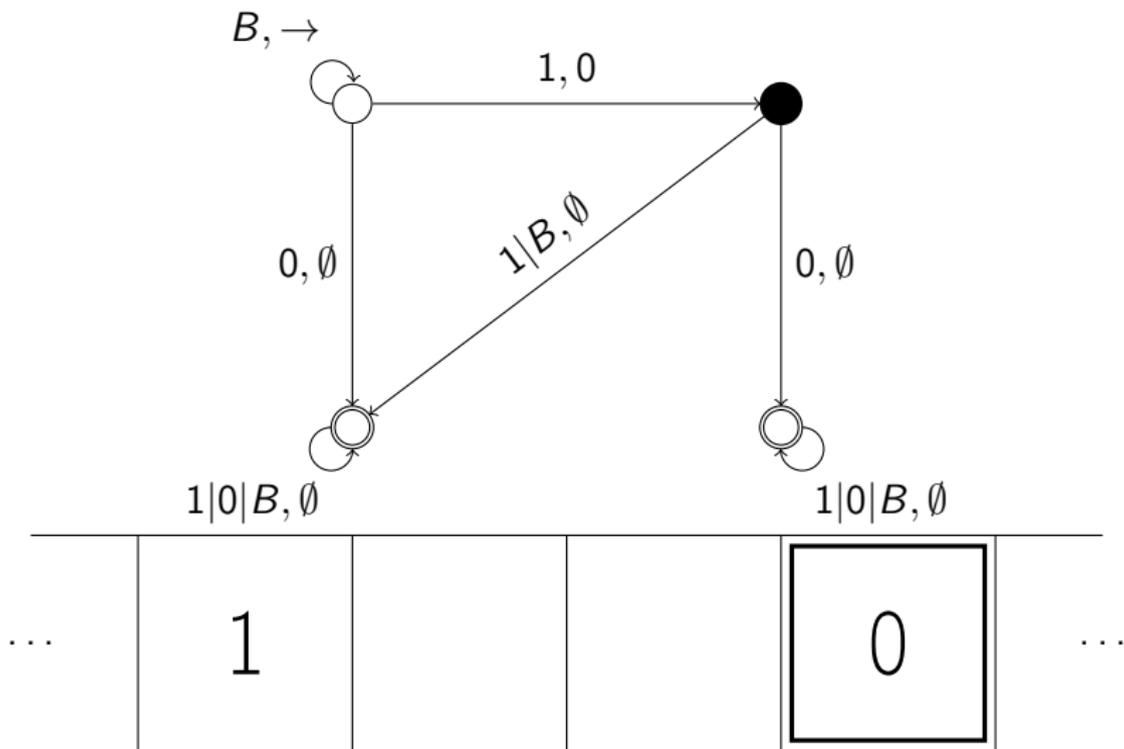
# Machine de Turing - le registre d'état



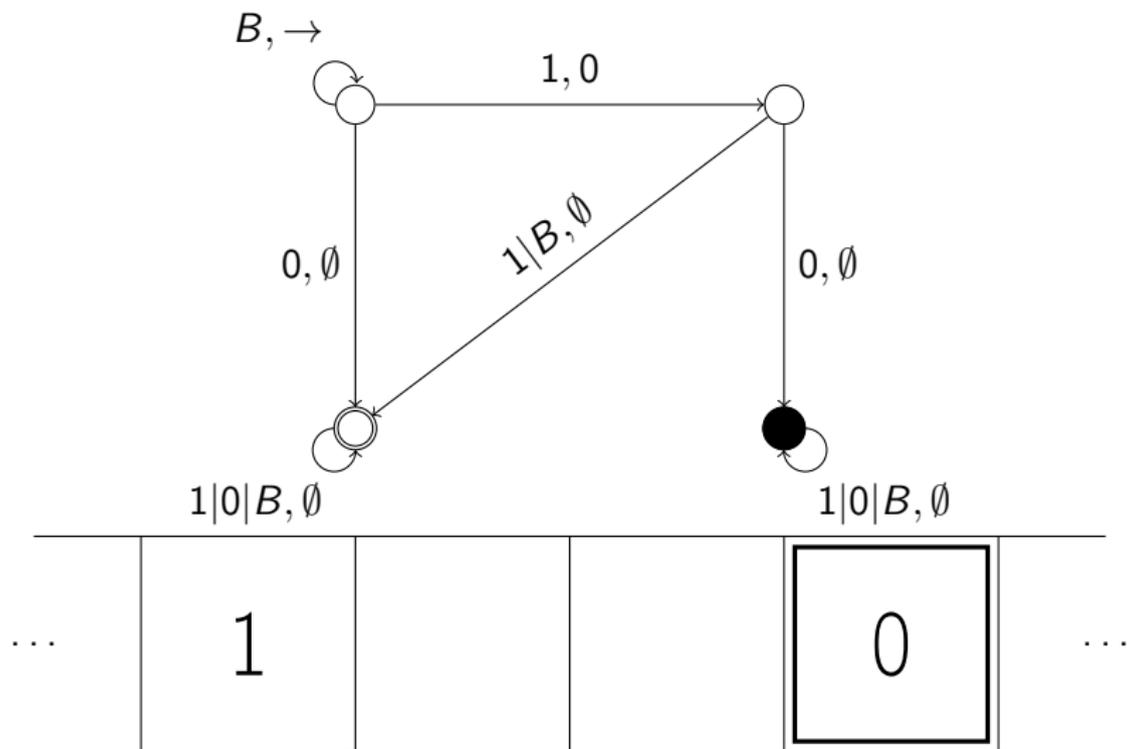
# Machine de Turing - le registre d'état



# Machine de Turing - le registre d'état



# Machine de Turing - le registre d'état



## Définition

Une machine de Turing contient

- une *bande*  $\mathcal{B}$  contenant des cellules numérotées de  $-\infty$  à  $+\infty$
- un *alphabet*  $\{0, 1, B\}$  de symboles pouvant être écrits sur les cellules
- une *tête* pointant sur la case 0
- un *graphe d'états* fini orienté  $G = (S, A)$  où  $A$  est étiqueté avec  $\mathcal{P}(\{0, 1, B\}) \times \{0, 1, B, \leftarrow, \rightarrow, \emptyset\}$ , un *symbole de lecture* et une *action*
- un *registre d'état* pointant sur l'*état initial* de  $S$
- un sous-ensemble  $F \subset S$  d'*états terminaux* de  $S$

On commence par écrire un mot fini  $x$  (composé de 1, de 0 et de B) sur la bande, tel que le premier caractère est sur la case 0.

À chaque itération,

- 1 la tête lit le symbole  $s$  sur la case  $c_i$  où elle pointe ;
- 2 le registre d'état, pointant sur l'état  $q$ , choisit un arc  $(q, q')$ , dont le symbole de lecture est  $s$  et l'action est  $a$  ;
- 3 on exécute l'action  $a$  :
  - si  $a$  est 0, 1 ou B, on remplace le symbole sur la case  $c_i$  par celui-ci,
  - si  $a$  est respectivement  $\leftarrow$  ou  $\rightarrow$ , la tête se déplace respectivement de  $c_i$  vers  $c_{i-1}$  ou  $c_{i+1}$ ,
  - si  $a$  est  $\emptyset$ , on ne fait rien ;
- 4 le registre d'état se déplace sur  $q'$  ;
- 5 si  $q' \in F$ , la machine s'arrête, sinon on recommence.

## Définition

Une machine de Turing est dite *déterministe* si et seulement si pour chaque état  $q$  et chaque couple d'arcs  $a_1$  et  $a_2$  sortant de  $q$ , les symboles de lecture de  $a_1$  et  $a_2$  sont différents. Sinon la machine est dite *non déterministe*.

Une machine de Turing non déterministe doit parfois faire des choix.

## Définition

Les états terminaux  $F$  sont partitionnés en deux ensembles des états d'*acceptation*  $F_Y$  et de *refus*  $F_N$

## Définition

Une machine de Turing déterministe accepte un mot  $x$ , si et seulement si, lorsque l'on exécute la machine avec ce mot écrit sur la bande, la machine s'arrête sur un état acceptant. Elle le refuse si elle s'arrête sur un état de refus.

## Définition

Les états terminaux  $F$  sont partitionnés en deux ensembles des états d'*acceptation*  $F_Y$  et de *refus*  $F_N$

## Définition

Une machine de Turing non déterministe accepte un mot  $x$ , si et seulement si, lorsque l'on exécute la machine avec ce mot écrit sur la bande, **il existe une suite de choix** telle que la machine s'arrête sur un état acceptant. Elle le refuse si elle peut s'arrêter sur un état de refus.

## Définition

Les états terminaux  $F$  sont partitionnés en deux ensembles des états d'*acceptation*  $F_Y$  et de *refus*  $F_N$

## Définition

Une machine de Turing non déterministe accepte un mot  $x$  *fortement*, si et seulement si, lorsque l'on exécute la machine avec ce mot écrit sur la bande, **quelle que soit la suite de choix**, la machine s'arrête sur un état acceptant. Elle le refuse fortement si elle doit s'arrêter sur un état de refus.

Cette dernière définition n'est pas conventionnelle mais bien pratique

On peut, de manière équivalente,

- ajouter des bandes,
- ajouter des symboles,
- séparer lecture et écriture,
- fusionner des actions un nombre fini de fois,
- ...

- Machine de Turing probabiliste
- Machine de Turing quantique
- Machine arithmétique
- ...