Chapitre 3 : Les classes de complexité

ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Définition

- La complexité en temps d'un calcul d'une machine de Turing est le nombre d'itérations nécessaires à la machine avant qu'elle ne s'arrête.
- La complexité en espace d'un calcul d'une machine de Turing est le nombre de cases mémoires sur lesquelles la machine a écrit avant qu'elle ne s'arrête.

La complexité est souvent calculée en fonction de la taille de x.

Complexité du calcul d'une machine de Turing

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **déterministe** et un mot x, on pose $t(\mathcal{M}, x)$ la complexité en temps du calcul de $\mathcal{M}$ quand l'entrée est x. De même, on pose $s(\mathcal{M}, x)$ sa complexité en espace.

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **non-déterministe**, un mot x et une suite de choix C, on pose $t(\mathcal{M}, x, C)$ la complexité en temps du calcul de $\mathcal{M}$ quand l'entrée est x et que la machine fait les choix C. De même, on pose $s(\mathcal{M}, x, C)$ sa complexité en espace.

Complexité dans le pire cas

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **déterministe**, la complexité (en temps) dans le pire cas de $\mathcal{M}$ est une fonction f telle que

$$f(n) = \max_{x \in \{0,1,B\}^n} (t(\mathcal{M}, x))$$

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **non-déterministe**, la complexité (en temps) dans le pire cas de $\mathcal{M}$ est une fonction f telle que

$$f(n) = \max_{x \in \{0,1,B\}^n} \min_{\text{Choix } C} (t(\mathcal{M}, x, C))$$

On définit de même la complexité en espace dans le pire cas.

Complexité asymptotique dans le pire cas

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ dont la complexité dans le pire cas est f, on dit que $\mathcal{M}$

- a une complexité dans le pire cas bornée asymptotiquement par g si $f(n) = O(g(n))$ quand $n \to +\infty$.
- a une complexité dans le pire cas minorée asymptotiquement par g si $f(n) = \Omega(g(n))$ quand $n \to +\infty$.
- a une complexité dans le pire cas asymptotiquement de l'ordre de g si $f(n) = \Theta(g(n))$ quand $n \to +\infty$.

Par abus de langage, on dira que $\mathcal{M}$ a une complexité $O(g(n))$ si la **complexité en temps dans le pire cas** de $\mathcal{M}$ est bornée asymptotiquement par g.

Problème de décision

Définition (formelle)

Un problème de décision Π est constitué d'un ensemble $\mathcal{L}$, dont les éléments sont appelés *instances* ou *entrées*, et d'un ensemble $\mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}$ d'*instances positives*. On nomme $\mathcal{L} \backslash \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_N$ les *instances négatives*.

Résoudre un problème avec une machine de Turing déterministe

Une machine de Turing **déterministe** $\mathcal{M}$ résoud Π si

- quand $x \in \mathcal{L}_Y$, $\mathcal{M}$ accepte x ;
- quand $x \in \mathcal{L}_N$ ou $x \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ refuse x.

Définition : DTIME

Soit un problème de décision Π, alors Π a une complexité (au pire) $O(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **déterministe** de complexité $O(f(n))$ résolvant Π. On écrit $\Pi \in \mathrm{DTIME}(f(n))$.

La classe de complexité P

Définition de la classe P

Un problème de décision Π est dit polynomial ou appartenant à la classe P si sa complexité est polynomiale. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en temps polynomial.

$$\mathrm{P} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(n^c)$$

La classe de complexité EXPTIME

Définition de la classe EXPTIME

Un problème de décision Π est dit exponentiel ou appartenant à la classe EXPTIME si sa complexité est exponentielle. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en temps exponentiel :

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(2^{n^c})$$

$$\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}$$

Définition : DSPACE

Soit un problème de décision Π, alors Π a une complexité en espace (au pire) $O(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **déterministe** de complexité en espace $O(f(n))$ résolvant Π. On écrit $\Pi \in \text{DSPACE}(f(n))$.

La classe de complexité PSPACE

Définition de la classe PSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe PSPACE si sa complexité en espace est polynomiale. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en espace polynomial.

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} DSPACE(n^c)$$

$$\text{P} \subset \text{PSPACE} \subset \text{EXPTIME}$$

La classe de complexité EXPSPACE

Définition de la classe EXPSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe EXPSPACE si sa complexité en espace est exponentielle. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en espace exponentiel :

$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(2^{n^c})$$

$$\text{PSPACE} \subsetneq \text{EXPSPACE}$$

$$\text{P} \subset \text{PSPACE} \subset \text{EXPTIME} \subset \text{EXPSPACE}$$

Problème de décision

Définition (formelle)

Un problème de décision Π est constitué d'un ensemble $\mathcal{L}$, dont les éléments sont appelés *instances* ou *entrées*, et d'un ensemble $\mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}$ d'*instances positives*. On nomme $\mathcal{L} \backslash \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_N$ les *instances négatives*.

Résoudre un problème avec une machine de Turing non déterministe

Une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ résoud Π si

- quand $x \in \mathcal{L}_Y$, $\mathcal{M}$ accepte x ;
- quand $x \in \mathcal{L}_N$ ou $x \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ refuse fortement x.

Complexité non déterministe d'un problème de décision

Définition : NTIME

Soit un problème de décision Π, alors $\Pi \in \text{NTIME}(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ de complexité $O(f(n))$ qui résoud Π.

Définition de la classe NP (non-deterministic Polynomial)

Un problème de décision Π appartient à la classe NP s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résoud Π en temps polynomial.

$$\mathsf{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{NTIME}(n^c)$$

$$\mathsf{P} \subset \mathsf{NP} \subset \mathsf{PSPACE}$$

La classe de complexité NEXPTIME

Définition de la classe NEXPTIME

Un problème de décision Π appartient à la classe NEXPTIME s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résoud Π en temps exponentiel :

$$\mathrm{NEXPTIME} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(2^{n^c})$$

$$\mathrm{EXPTIME} \subset \mathrm{NEXPTIME} \subset \mathrm{EXPSPACE}$$

$$\mathrm{NP} \subsetneq \mathrm{NEXPTIME}$$

Complexité en espace non déterministe d'un problème de décision

Définition : NSPACE

Soit un problème de décision Π, alors $\Pi \in \text{NSPACE}(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ de complexité en espace $O(f(n))$ qui résoud Π.

La classe de complexité NPSPACE

Définition de la classe NPSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe NPSPACE s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résoud Π en espace polynomial.

$$\text{NPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NSPACE}(n^c)$$

! ! !

$$\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$$

La classe de complexité NEXPSPACE

Définition de la classe NEXPSPACE

Un problème de décision Π est appartient à la classe NEXPSPACE s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résoud Π en espace exponentiel :

$$\mathrm{NEXPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(2^{n^c})$$

! ! !

$$\mathrm{EXPSPACE} = \mathrm{NEXPSPACE}$$

La classe de complexité Co-NP

Définition de la classe Co-NP

Un problème de décision $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_N)$ appartient à la classe Co-NP si $\Pi^c = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_N, \mathcal{L}_Y)$ appartient à NP.

Autre définition de la classe Co-NP

Un problème de décision Π appartient à la classe Co-NP s'il existe une machine $\mathcal{M}$ **non déterministe** de complexité polynomiale qui accepte fortement les mots de $\mathcal{L}_Y$ et refuse les autres.

$$\text{P} \subset \text{NP} \cap \text{Co-NP}$$

$$\text{Co-NP} \subset \text{PSPACE}$$

Et tant d'autres

- Hiérarchie polynomiale : $\Sigma_2, \Pi_2, \Sigma_k, \Pi_k, PH$
- Classes probabiliste : BPP, ZPP, RP
- Classes quantiques : BQP, EQP
- Classes non décidables : RE, ALL

https://complexityzoo.uwaterloo.ca/Complexity_Zoo