

Chapitre 4 : Réductions et complétude

ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Idée de base

Une manière de résoudre un problème Π_1 est de le transformer en un autre Π_2 qu'on sait résoudre.

Si la transformation est rapide et que le problème Π_2 peut être résolu rapidement, alors Π_1 peut être résolu rapidement.

Si la transformation est rapide et que le problème Π_1 ne peut être résolu rapidement, alors Π_2 ne peut être résolu rapidement.

Définition (informelle)

Soit deux problèmes de décision Π_1 et Π_2 , une réduction polynomiale de Π_1 vers Π_2 transforme en temps polynomial toute instance positive (resp. negative) de Π_1 en une instance positive (resp. negative) de Π_2 .

Si Π_1 se réduit à Π_2 , alors on dit que Π_2 est *plus difficile* que Π_1 .

Définition

Soit deux problèmes de décision Π_1 et Π_2 , une réduction polynomiale de $\Pi_1 = (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}_Y^1, \mathcal{L}_N^1)$ vers $\Pi_2 = (\mathcal{L}^2, \mathcal{L}_Y^2, \mathcal{L}_N^2)$ est un algorithme $\mathcal{R}$ tel que

- $\mathcal{R}$ a une complexité polynomiale
- $\mathcal{R}$ prend en entrée une instance $\mathcal{I}$ de Π_1 et renvoie en sortie une instance $\mathcal{J}$ de Π_2
- $\mathcal{I} \in \mathcal{L}_Y^1 \Leftrightarrow \mathcal{J} \in \mathcal{L}_Y^2$

On note $\Pi_1 \preceq \Pi_2$.

Problème $\mathcal{C}$ -difficile

Soit $\mathcal{C}$ une classe de complexité (NP, EXPTIME, ...) et Π_1 un problème de décision. On dit que Π_1 est $\mathcal{C}$ -Difficile si, pour tout problème Π_2 de $\mathcal{C}$, $\Pi_2 \preceq \Pi_1$.

Problème $\mathcal{C}$ -complet

Soit $\mathcal{C}$ une classe de complexité (NP, EXPTIME, ...) et Π un problème de décision. On dit que Π est $\mathcal{C}$ -Complet si $\Pi \in \mathcal{C}$ et s'il est $\mathcal{C}$ -difficile.

Démontrer la difficulté

- Si Π_1 est $\mathcal{C}$ -Difficile et si $\Pi_1 \preceq \Pi_2$ alors Π_2 est $\mathcal{C}$ -Difficile.

P et NP

- Si $\Pi_2 \in P$ et $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, alors $\Pi_1 \in P$.
- Si $\Pi_2 \in NP$ et $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, alors $\Pi_1 \in NP$.
- $P \neq NP \Leftrightarrow \forall$ problème Π NP-Complet, $\Pi \notin P$.
- 3-SAT est NP-Complet.

Définition : Réduction polynomiale de Turing

Soient deux problèmes Π_1 et Π_2 , une réduction polynomiale de Turing de Π_1 vers Π_2 est un algorithme $\mathcal{R}$ tel que

- $\mathcal{R}$ peut appeler un algorithme $\mathcal{R}'$ (imaginaire), appelé *oracle*, résolvant Π_2 en temps constant ;
- $\mathcal{R}$ résoud Π_1 en temps polynomial.

On note $\Pi_1 \preceq_T \Pi_2$.

Π_1 et Π_2 ne sont pas nécessairement des problèmes de décision.

- Réduction exponentielle
- Réduction en espace polynomial
- Réduction probabiliste
- ...