Chapitre 6 : Problèmes d'optimisation

ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Définition (informelle)

Un problème d'optimisation est un problème possédant des entrées (les *instances*), des solutions au problème (les *solutions réalisables*), une *mesure* ou *poids* associant à chaque solution un entier.
L'objectif est de trouver une solution maximisant ou minimisant la mesure.

Problèmes associés à un problème d'optimisation

Définition (informelle)

À un problème d'optimisation Π est associé 3 problèmes :

- un *problème de décision* Π_D : existe-t-il une solution réalisable de poids
  - inférieur à un entier K ?, si l'objectif est de minimiser,
  - supérieur à un entier K ?, si l'objectif est de maximiser ;
- un *problème d'évaluation* Π_E : trouver le poids d'une solution optimale ;
- un *problème de construction* Π_C : trouver une solution optimale et sa valeur.

PO et NPO

Définition

PO et NPO sont les équivalents de P et NP pour les problèmes d'optimisation : les problèmes d'optimisation que l'on peut résoudre en temps polynomial déterministe ou non déterministe.

En particulier,

- $\Pi \in PO \Rightarrow \Pi_D \in P$
- $\Pi \in NPO \Rightarrow \Pi_D \in NP$

Problème d'optimisation

Définition : problème d'optimisation

Un problème d'optimisation Π est un quadruplet $(\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ tel que :

- $\mathcal{I}$ est un ensemble d'*instances* de Π ;
- $\mathcal{S}$ est une fonction qui à $x \in \mathcal{I}$ associe un ensemble de *solutions réalisables* de x ;
- $\mathcal{M}$ est une fonction de *mesure* qui à $x \in \mathcal{I}$ et $y \in \mathcal{S}(x)$ associe un entier ;
- $\mathcal{O}$ est l'*objectif* et vaut min ou max et détermine si on cherche trouver une solution de mesure maximum ou minimum.

$\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}(x)$ peuvent contenir n'importe quel objet mathématique.

Solution optimale

Définition

Soit $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ un problème d'optimisation et $x \in \mathcal{I}$. On appelle *solution optimale* une solution $y^* \in \mathcal{S}(x)$ telle que :

$$\mathcal{M}(x, y^*) = \min_{y \in \mathcal{S}(x)} \mathcal{M}(x, y) \text{ si } \mathcal{O} = \min$$

$$\mathcal{M}(x, y^*) = \max_{y \in \mathcal{S}(x)} \mathcal{M}(x, y) \text{ si } \mathcal{O} = \max$$

On note $\mathcal{S}^*(x)$ *l'ensemble des solutions optimale* de x et $\mathcal{M}^*(x)$ la valeur $\mathcal{M}(x, y^*)$ des solutions optimales.

Taille d'une instance ou d'une solution

Définition

La taille d'une instance ou d'une solution réalisable est définie comme le nombre de bits nécessaires pour l'encoder.

On note généralement $|x|$ ou n la taille de l'entrée x et $|y|$ la taille d'une solution réalisable y de x.

Problèmes associés à un problème d'optimisation

Définition

À un problème d'optimisation $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$ est associé 3 problèmes :

- un *problème de décision* Π_D : soit $x \in \mathcal{I}$ et un entier K, déterminer si $\mathcal{M}^*(x) \leq K$ si $\mathcal{O} = \min$, ou si $\mathcal{M}^*(x) \geq K$ si $\mathcal{O} = \max$.
- un *problème d'évaluation* Π_E : soit $x \in \mathcal{I}$, calculer $\mathcal{M}^*(x)$;
- un *problème de construction* Π_C : soit $x \in \mathcal{I}$, calculer une solution optimale $y \in \mathcal{S}^*(x)$ et $\mathcal{M}^*(x)$.

Quelques résultats

Théorème

Soit Π un problème d'optimisation :

$$\Pi_D \preccurlyeq_T \Pi_E \preccurlyeq_T \Pi_C$$

NPO

Définition

Soit un problème d'optimisation $\Pi = (\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{M}, \mathcal{O})$, le problème Π appartient à la classe NPO si

- soit x un nombre binaire, on peut vérifier en temps polynomial si x encode une instance de $\mathcal{I}$;
- il existe un polynome q tel que, pour tout $x \in \mathcal{I}$
  - pour tout $y \in \mathcal{S}(x)$, $|y| \leq q(|x|)$,
  - pour tout nombre binaire y tel que $|y| \leq q(|x|)$, on peut vérifier en temps polynomial si y encode une solution réalisable de x ;
- pour tout $x \in \mathcal{I}$ et tout $y \in \mathcal{S}(x)$, on peut calculer $\mathcal{M}(x, y)$ en temps polynomial.

Définition

Un problème $\Pi \in$ NPO appartient à la classe PO si on peut résoudre Π_C en temps polynomial.

Par définition PO $\subseteq$ NPO.

PO, NPO, P et NP

Théorème

$$\Pi \in PO \Rightarrow \Pi_D \in P$$

$$\Pi \in NPO \Rightarrow \Pi_D \in NP$$

$$\Pi \in NPO \Rightarrow \Pi_E \preccurlyeq_T \Pi_D$$

Problème d'optimisation NP-Difficile

Définition

Soit un problème d'optimisation Π_1 , Π_1 est NP-Difficile si, pour tout problème de décision $\Pi_2 \in \mathrm{NP}$, $\Pi_2 \preccurlyeq_T \Pi_1$.

Théorème

Soit $\Pi \in \mathrm{NPO}$, si Π_D est NP-Difficile alors Π est NP-difficile.

Théorème

$\mathrm{PO} = \mathrm{NPO} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{NP}$

Une bonne grosse preuve

Théorème

Soit $\Pi \in$ NPO, si Π_D est NP-Complet alors $\Pi_C \preccurlyeq_T \Pi_D$.