

# Chapitre 8 : Autres classifications

## ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel ([dimitri.watel@ensiie.fr](mailto:dimitri.watel@ensiie.fr))

2017-2018

# Approximation polynomiale

Est-il nécessaire de renvoyer une solution optimale ?

# Approximation polynomiale

## Définition

Un *algorithme d'approximation polynomial* pour un problème  $\Pi$  est un algorithme polynomial qui renvoie une solution réalisable de  $\Pi$  "proche" d'une solution optimale.

# Approximation polynomiale d'un problème de minimisation

## Définition

Un *algorithme d'approximation polynomiale* de rapport  $r$  pour un problème de minimisation  $\Pi$  ou  $r$  approximation polynomiale est un algorithme polynomial qui, pour toute instance  $x$  de  $\Pi$ , renvoie une solution réalisable  $y$  de  $\Pi$  telle que  $M(x, y) \leq r \cdot M^*(x)$ .

# Approximation polynomiale d'un problème de maximisation

## Définition

Un *algorithme d'approximation polynomiale* de rapport  $r$  pour un problème de maximisation  $\Pi$  ou  $r$  approximation polynomiale est un algorithme polynomial qui, pour toute instance  $x$  de  $\Pi$ , renvoie une solution réalisable  $y$  de  $\Pi$  telle que  $M(x, y) \geq r \cdot M^*(x)$ .

# Classes d'approximabilité

## Classes d'approximabilité

- APX : il existe un algorithme d'approximation polynomial de rapport  $r$  constant
- PTAS : il existe une série d'algorithmes d'approximation polynomial dont le rapport est aussi proche de 1 qu'on le souhaite
- $f$ -APX : il existe un algorithme d'approximation polynomial de rapport  $f(|x|)$ , pour toute entrée  $x$ , où  $f$  est une fonction calculable.

# Complexité paramétrée

Peut-on maîtriser la complexité en maîtrisant certains paramètres du problème ?

## Paramètre d'un problème

### Définition

Soit un problème  $\Pi$ . Un paramètre de  $\Pi$  est un entier  $k$  associé à une partie de ses entrées.

Par exemple

- (CLIQUE PARAM) : Soit  $G$  un graphe,  $G$  possède-t-il une clique de taille  $k$  ?
- (UST PARAM) : Soit  $G = (V, E)$  un graphe et  $X = (v_1, v_2, \dots, v_k) \subset V$ , trouver un arbre couvrant  $X$  de taille minimum.
- (NPTURING PARAM) : Soit une machine de Turing classique et une entrée  $x$ , la machine s'arrête-t-elle en moins de  $k$  étapes ?

## Problème XP

### Définition

Soit un problème  $\Pi$  paramétré par  $k$ . Ce problème est XP vis-à-vis de  $k$  si, lorsque l'on fixe  $k$ ,  $\Pi$  devient polynomial. Autrement dit, il existe une fonction  $f$  calculable et un algorithme de complexité  $O(n^{f(k)})$  pour résoudre  $\Pi$ .

# Problème FPT

## Définition

Soit un problème  $\Pi$  paramétré par  $k$ . Ce problème est FPT vis-à-vis de  $k$  (Fixed Parameter Tractable) s'il existe une fonction  $f$  calculable, un polynôme  $p$  et un algorithme de complexité  $O(f(k)p(n))$  pour résoudre  $\Pi$ .

# Complexité probabiliste

L'algorithme doit-il être déterministe ?

# Machine de Turing probabiliste

## Définition

Une *machine de Turing probabiliste* est une machine de Turing possédant un générateur de bit aléatoire uniforme qu'elle peut lire à tout instant pour prendre une décision aléatoire.

Un algorithme probaliste est un algorithme qui prend certaines décisions aléatoires.

## Classe RP

### Définition

Un problème de décision  $\Pi$  appartient à la classe RP s'il existe une machine de Turing probabiliste qui répond en temps polynomial

- NON si la réponse est NON ;
- OUI avec une probabilité supérieure à  $1/2$  si la réponse est OUI.

# Classe BPP

## Définition

Un problème de décision  $\Pi$  appartient à la classe BPP s'il existe une machine de Turing probabiliste qui répond en temps polynomial et qui répond correctement avec une probabilité supérieure à  $2/3$ .

# Classe ZPP

## Définition

Un problème de décision  $\Pi$  appartient à la classe ZPP s'il existe une machine de Turing probabiliste qui répond correctement et qui répond en temps polynomial en espérance.