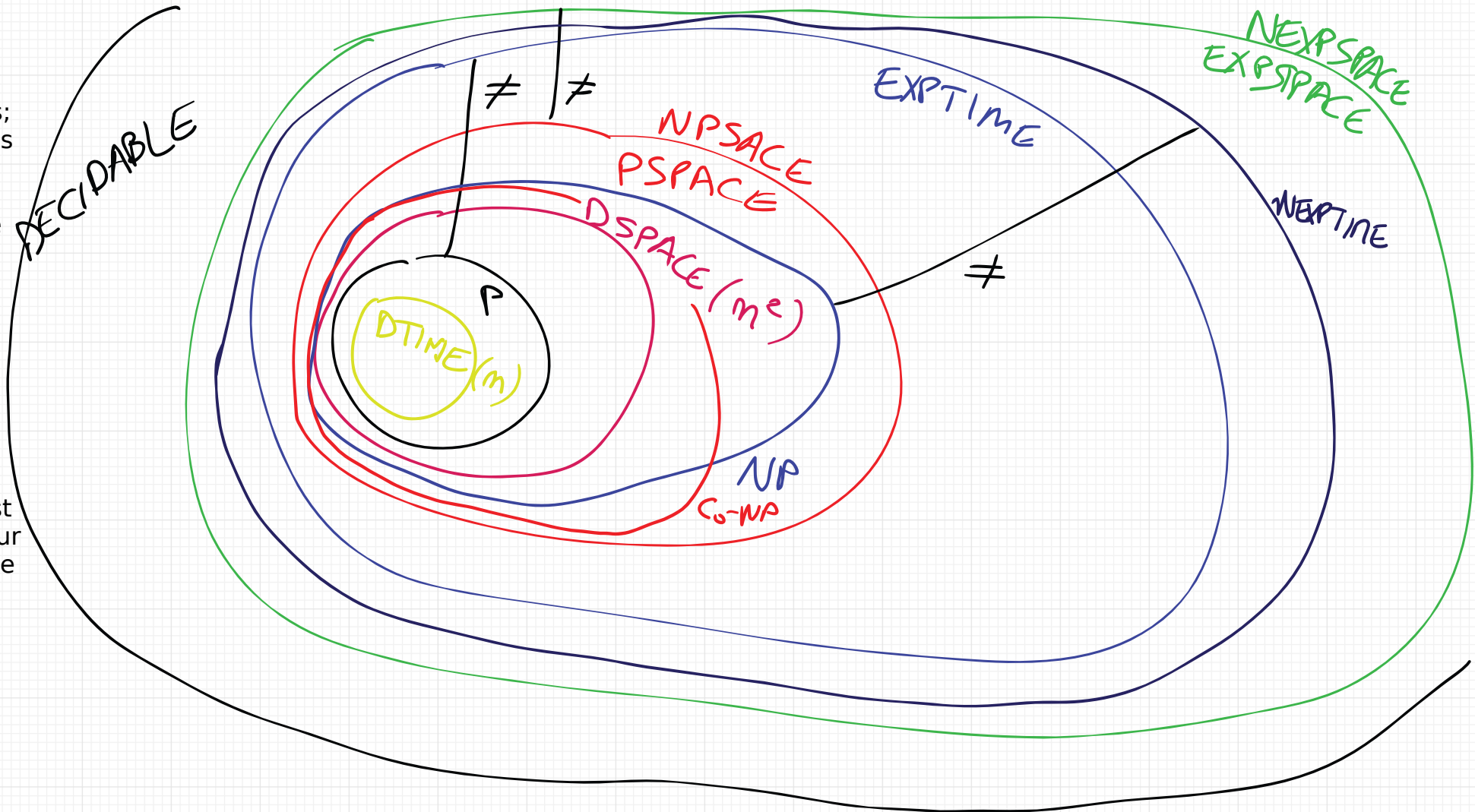


Je rappelle que la position de $\text{DSpace}(n^2)$ n'est pas précise ici, je ne sais pas si elle est incluse dans NP ou non.

Ici on a les indécidables; pour lesquels il n'existe pas d'algo qui résout le problème.

DECIDABLE

(Pour tout algo : soit l'algo ne s'arrête pas pour au moins une entrée ; soit l'algo est incorrect pour au moins une entrée).



Chapitre 3 : Les classes de complexité

ENSIIE - Théorie de la complexité

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2018

Définition

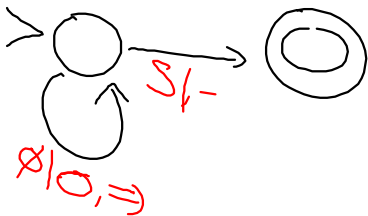
- La complexité en temps d'un calcul d'une machine de Turing est le nombre d'itérations nécessaires à la machine avant qu'elle ne s'arrête.
- La complexité en espace d'un calcul d'une machine de Turing est le nombre de cases mémoires sur lesquelles la machine a écrit avant qu'elle ne s'arrête.

La complexité est souvent calculée en fonction de la taille de x .

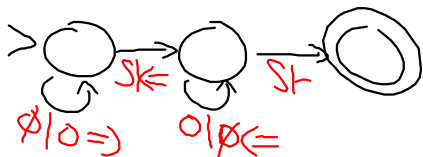
Attention, on ne compte pas la taille de l'entrée dans la complexité en espace : cette entrée est déjà écrite au début du calcul.



Coût en temps : 1
Coût en espace : 1



Temps : 4
Espace : 3



Temps : 8
Espace : 3

On réécrit sur les mêmes cases : la complexité en espace n'augmente pas.

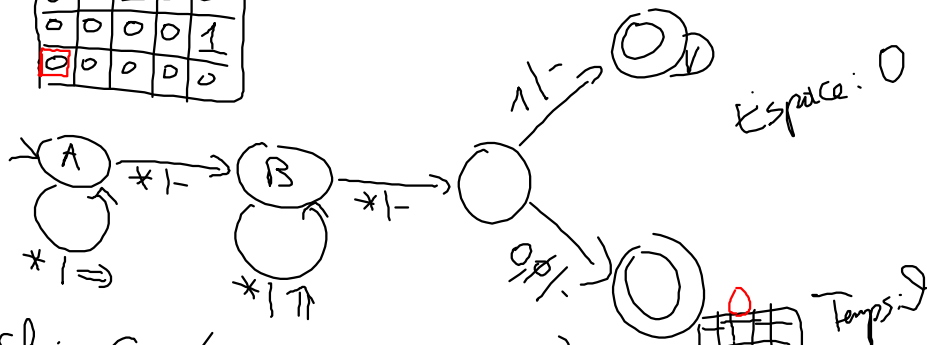
Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **déterministe** et un mot x , on pose $t(\mathcal{M}, x)$ la complexité en temps du calcul de $\mathcal{M}$ quand l'entrée est x . De même, on pose $s(\mathcal{M}, x)$ sa complexité en espace.

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **non-déterministe**, un mot x et une suite de choix C , on pose $t(\mathcal{M}, x, C)$ la complexité en temps du calcul de $\mathcal{M}$ quand l'entrée est x et que la machine fait les choix C . De même, on pose $s(\mathcal{M}, x, C)$ sa complexité en espace.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0



choix $C_1: (2 \times AA, 4 \times BB) \rightarrow$ Temps: 2

choix $C_2: (4 \times AA, 1 \times BB) \rightarrow$ Temps: 8

Il est important de
retenir ici que le temps (et l'espace) dépend des choix que fait la machine
pour atteindre l'état final.

Complexité dans le pire cas

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **déterministe**, la complexité (en temps) dans le pire cas de $\mathcal{M}$ est une fonction f telle que

$$f(n) = \max_{x \in \{0,1,B\}^n} (t(\mathcal{M}, x))$$



La fonction f peut avoir n'importe quelle forme.

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ **non-déterministe**, la complexité (en temps) dans le pire cas de $\mathcal{M}$ est une fonction f telle que

$$f(n) = \max_{x \in \{0,1,B\}^n} \min_{\text{Choix } C} (t(\mathcal{M}, x, C))$$

On définit de même la complexité en espace dans le pire cas.

Je vous invite à aller voir ce lien pour avoir des infos sur ce "max min"

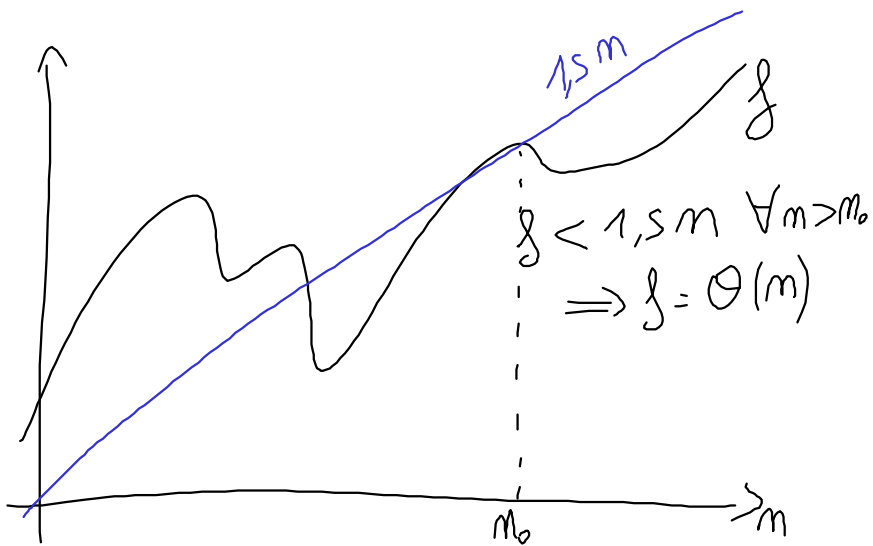
http://dimitri.watel.free.fr/teaching/s4_cal/courses/2018/03_ClassesComplexite.pdf

Définition

Soit une machine $\mathcal{M}$ dont la complexité dans le pire cas est f , on dit que $\mathcal{M}$

- a une complexité dans le pire cas bornée asymptotiquement par g si $f(n) = O(g(n))$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- a une complexité dans le pire cas minorée asymptotiquement par g si $f(n) = \Omega(g(n))$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- a une complexité dans le pire cas asymptotiquement de l'ordre de g si $f(n) = \Theta(g(n))$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Par abus de langage, on dira que $\mathcal{M}$ a une complexité $O(g(n))$ si la **complexité en temps dans le pire cas** de $\mathcal{M}$ est bornée asymptotiquement par g .



Définition (formelle)

Un problème de décision Π est constitué d'un ensemble $\mathcal{L}$, dont les éléments sont appelés *instances* ou *entrées*, et d'un ensemble $\mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}$ d'*instances positives*. On nomme $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_N$ les *instances négatives*.

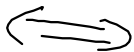
Résoudre un problème avec une machine de Turing déterministe

Une machine de Turing **déterministe** $\mathcal{M}$ résout Π si

- quand $x \in \mathcal{L}_Y$, $\mathcal{M}$ accepte x ;
- quand $x \in \mathcal{L}_N$ ou $x \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ refuse x .

Ca signifie qu'on sait reconnaître une entrée. On a toujours supposé que le mot donné en entrée était bien formé ; histoire de simplifier.

- Soit G un graphe, $\exists ?$ une clique de taille 4 ?



$$\mathcal{L} = \{ \text{graphe} \}$$

$$\mathcal{L}^Y = \{ \text{graphe} \text{ avec une clique de taille 4} \}$$

$$\mathcal{L}^N = \{ \text{les autres} \}$$

Je rappelle que les 2 notations sont identiques, la seconde est juste un peu plus formelle. Vous êtes libre d'utiliser les deux, mais vous êtes invités à préférer la première qui est plus lisible.

On utilisera la seconde si on a besoin de notations formelles (comme c'est le cas dans le chapitre sur les réductions).

Définition : DTIME

Soit un problème de décision Π , alors Π a une complexité (au pire) $O(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **déterministe** de complexité $O(f(n))$ résolvant Π . On écrit $\Pi \in \text{DTIME}(f(n))$.

↑
Deterministic

Définition de la classe P

Un problème de décision Π est dit polynomial ou appartenant à la classe P si sa complexité est polynomiale. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en temps polynomial.

$$P = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(n^c)$$

Définition de la classe EXPTIME

Un problème de décision Π est dit exponentiel ou appartenant à la classe EXPTIME si sa complexité est exponentielle. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en temps exponentiel :

$$\text{EXPTIME} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(2^{n^c})$$

$$P \subsetneq \text{EXPTIME}$$

Définition : DSPACE

Soit un problème de décision Π , alors Π a une complexité en espace (au pire) $O(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **déterministe** de complexité en espace $O(f(n))$ résolvant Π . On écrit $\Pi \in \text{DSPACE}(f(n))$.

Définition de la classe PSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe PSPACE si sa complexité en espace est polynomiale. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en espace polynomial.

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(n^c)$$

$$\text{P} \subseteq \text{PSPACE} \subset \text{EXPTIME}$$

(écrire prend du temps)

Définition de la classe EXPSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe EXPSPACE si sa complexité en espace est exponentielle. Autrement dit, il existe une machine de Turing **déterministe** qui résoud Π en espace exponentiel :

$$\text{EXPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSPACE}(2^{n^c})$$

$$\text{PSPACE} \subsetneq \text{EXPSPACE}$$

$$\text{P} \subset \text{PSPACE} \subset \text{EXPTIME} \subset \text{EXPSPACE}$$

Définition (formelle)

Un problème de décision Π est constitué d'un ensemble $\mathcal{L}$, dont les éléments sont appelés *instances* ou *entrées*, et d'un ensemble $\mathcal{L}_Y \subset \mathcal{L}$ d'*instances positives*. On nomme $\mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_N$ les *instances négatives*.

Résoudre un problème avec une machine de Turing non déterministe

Une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ résout Π si

- quand $x \in \mathcal{L}_Y$, $\mathcal{M}$ accepte x ; ($\exists$ choix / Π accepte)
- quand $x \in \mathcal{L}_N$ ou $x \notin \mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ refuse fortement x .

($\forall$ choix / Π refuse)

$\Rightarrow$ Possiblement Π refuse x même si $x \in \mathcal{L}_Y$

Définition : NTIME

Soit un problème de décision Π , alors $\Pi \in \text{NTIME}(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ de complexité $O(f(n))$ qui résoud Π .

Définition de la classe NP (non-deterministic Polynomial)

Un problème de décision Π appartient à la classe NP s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résout Π en temps polynomial.

$$\text{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(n^c)$$

$$\text{P} \subset \text{NP} \subset \text{PSPACE}$$

Définition de la classe NEXPTIME

Un problème de décision Π appartient à la classe NEXPTIME s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résout Π en temps exponentiel :

$$\text{NEXPTIME} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(2^{n^c})$$

$$\text{EXPTIME} \subset \text{NEXPTIME} \subset \text{EXPSPACE}$$

$$\text{NP} \subsetneq \text{NEXPTIME}$$

Complexité en espace non déterministe d'un problème de décision

Définition : NSPACE

Soit un problème de décision Π , alors $\Pi \in \text{NSPACE}(f(n))$ s'il existe une machine de Turing **non déterministe** $\mathcal{M}$ de complexité en espace $O(f(n))$ qui résoud Π .

Définition de la classe NPSPACE

Un problème de décision Π appartient à la classe NPSPACE s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résout Π en espace polynomial.

$$\text{NPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NSPACE}(n^c)$$

!!!

$$\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$$

Définition de la classe NEXPSPACE

Un problème de décision Π est appartient à la classe NEXPSPACE s'il existe une machine de Turing **non déterministe** qui résoud Π en espace exponentiel :

$$\text{NEXPSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NSPACE}(2^{n^c})$$

!!!

$$\text{EXPSPACE} = \text{NEXPSPACE}$$

La classe de complexité Co-NP

Définition de la classe Co-NP

Un problème de décision $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_N)$ appartient à la classe Co-NP si $\Pi^c = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_N, \mathcal{L}_Y)$ appartient à NP.

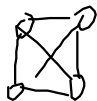
Autre définition de la classe Co-NP

Un problème de décision Π appartient à la classe Co-NP s'il existe une machine $\mathcal{M}$ **non déterministe** de complexité polynomiale qui accepte fortement les mots de $\mathcal{L}_Y$ et refuse les autres.

Soit G graphe, est-ce que G ne contient pas de clique de taille 4 ?

$$P \subseteq NP \cap \text{Co-NP}$$

$$\text{Co-NP} \subseteq \text{PSPACE}$$



"Soit Φ une formule, est-ce que, pour toute affectation des variables Φ est vrai?" est un autre exemple de problème dans Co-NP.

Et tant d'autres

- Hiérarchie polynomiale : $\Sigma_2, \Pi_2, \Sigma_k, \Pi_k, PH$
- Classes probabiliste : BPP, ZPP, RP
- Classes quantiques : BQP, EQP
- Classes non décidables : RE, ALL

https://complexityzoo.uwaterloo.ca/Complexity_Zoo