

TD 2 : Classes de complexité

Théorie de la complexité S5.

2022

Exercice 1 — *Appartenance aux classes de complexité*

Pour chacun des problèmes de l'exercice 1 du TD précédent, déterminez si le problème est dans P, dans NP, dans Co-NP, dans PSPACE, dans EXPTIME, dans NEXPTIME ou dans EXPSPACE.

Exercice 2 — *Démonstrations simples*

1. Démontrer que $\text{DTIME}(f(n)) \subset \text{NTIME}(f(n))$.
2. Démontrer que $\text{DTIME}(f(n)) \subset \text{DSPACE}(f(n))$.
3. Démontrer que, si $\text{NP} = \text{P}$ alors $\text{Co-NP} = \text{NP}$. La réciproque est-elle vraie ?
4. Démontrer que $\text{P} = \text{Co-P}$.
5. En utilisant le théorème de Savitch qui dit que $\text{NSPACE}(f(n)) \subset \text{DSPACE}(f(n)^2)$, démontrez que $\text{PSPACE} = \text{NPSPACE}$ et $\text{EXPSPACE} = \text{NEXPSPACE}$. En déduire que $\text{NPSPACE} = \text{Co-NPSPACE}$ et que $\text{NEXPSPACE} = \text{Co-NEXPSPACE}$.
6. En utilisant le théorème de la hiérarchie en temps déterministe qui dit (entre autres) que $\text{DTIME}(f(n)) \subsetneq \text{DTIME}(f(n)^2)$, démontrez que $\text{P} \subsetneq \text{EXPTIME}$.

Exercice 3 — *PSPACE \subset EXPTIME*

1. Soit un problème Π dans PSPACE, combien de cases de la bande peut utiliser une machine de Turing résolvant Π en espace polynomial.
2. Dans combien de configurations (registre d'état + bande + position de la tête) cette machine peut-elle se retrouver ?
3. La machine peut-elle se retrouver deux fois dans la même configuration au cours de son calcul ?
4. En déduire que la complexité de l'algorithme est nécessairement au plus exponentielle.

Exercice 4 — *P = NP \Rightarrow EXPTIME = NEXPTIME*

On suppose que $\text{P} = \text{NP}$.

1. Soit un problème Π dans NEXPTIME, quelle est la complexité en temps d'une machine de Turing non déterministe résolvant Π ?
2. Soit c une constante, soit Π_2 le problème de décision dont les instances sont $\{x \cdot \pi^{2^{|x|^c}} \mid x \in \{0, 1\}^*\}$, où π^d est la répétition d fois du symbole π . Les instances positives sont celles où x encode une instance positive de Π . En choisissant correctement la constante c , construire un algorithme non déterministe qui résout Π_2 en temps polynomial.
3. En déduire que $\Pi \in \text{EXPTIME}$.
4. En déduire que $\text{EXPTIME} = \text{NEXPTIME}$.