TD 3 : Réductions et complétude

Théorie de la complexité S5.

2017-2018

Exercice 1 — *Réductions simples*

1. Montrer que (SIZE) $\preccurlyeq$ (INS).
2. Montrer que (SIZE) $\preccurlyeq$ (CHROMA).
3. Montrer que (INS) $\preccurlyeq$ (W-INS).
4. Montrer que (3-COL ?) $\preccurlyeq$ (SAT).
5. Montrer que (COHAM) $\preccurlyeq$ (TAU).
6. Montrer que (HAM ?) $\preccurlyeq$ (LOP).
7. Montrer que (HAM ?) $\preccurlyeq$ (TSP).
8. Montrer que (SAT ?) $\preccurlyeq$ (3-SAT ?).
9. Montrer que (TAU ?) $\preccurlyeq$ (3-TAU ?).
10. Montrer que (SAT ?) $\preccurlyeq$ (QBF ?).
11. Montrer que (TAU ?) $\preccurlyeq$ (QBF ?).
12. Montrer que (CONNECTIVITY ?) $\preccurlyeq$ (MSPT).
13. Montrer que (SUDOKU ?) $\preccurlyeq$ (CHROMA).
14. Montrer que (INS) $\preccurlyeq$ (ILP).
15. Montrer que (BIPARTI ?) $\preccurlyeq$ (2-COL ?).
16. Montrer que (2-COL ?) $\preccurlyeq$ (BIPARTI ?).
17. Montrer que (SUBSET SUM ?) $\preccurlyeq$ (PARTITION).
18. Montrer que (SUBSET SUM ?) $\preccurlyeq$ (KNAPSACK).
19. Montrer que (SET COVER) $\preccurlyeq$ (DST).
20. Montrer que (SET COVER) $\preccurlyeq$ (UST).

On sait que (SAT) est NP-Complet et que (TAU) est Co-NP-Complet, pour quels problèmes pouvez vous affirmer qu'ils sont (Co-)NP-Complet ou (Co-)NP-Difficile.

Exercice 2 — *(SUBSET SUM est NP-Complet)*

On rappelle que (SUBSET SUM) est le problème suivant : soit Y un ensemble d'entiers et $s \in \mathbb{N}$, existe-t-il un sous-ensemble Z de Y dont la somme fait s ?

On veut démontrer que (SUBSET SUM) est NP-Complet.

1. Montrez que le problème est dans NP.
2. Soit $\mathcal{I}$ une instance de (3-SAT ?), on veut transformer $\mathcal{I}$ en une instance $\mathcal{J}$ de (SUBSET SUM ?) en temps polynomial telle que $\mathcal{I}$ est positive si et seulement si $\mathcal{J}$ est positive. On pose Y l'ensemble des entiers de $\mathcal{J}$ et s la somme cible à atteindre.
   - On suppose que $\mathcal{I}$ a n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$
   - Les nombres de $\mathcal{J}$ ont $n+m$ chiffres et seront donc compris entre 0 et 10^{n+m}.
   - Pour chaque variable x_i de $\mathcal{I}$, on ajoute un entier x_i à $\mathcal{J}$ tel que le i^{e} chiffre est 1 et tel que le $n+j^{\text{e}}$ chiffre est 1 si et seulement si x_i est dans la j^{e} clause de $\mathcal{I}$. Les autres chiffres sont 0.

— Pour chaque variable x_i de $\mathcal{I}$, on ajoute un entier $\bar{x_i}$ à $\mathcal{J}$ tel que le i^{e} chiffre est 1 et tel que le $n+j^{e}$ chiffre est 1 si et seulement si $\bar{x_i}$ est dans la j^{e} clause de $\mathcal{I}$. Les autres chiffres sont 0.

— Pour chaque clause C_j de $\mathcal{I}$, on ajoute à $\mathcal{J}$ deux nombres égaux r_j et s_j où le $n+j^{e}$ chiffre est 1. Les autres chiffres sont 0.

— s est le nombre où les n premiers chiffres sont 1 et les autres sont 3.

(a) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2 \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$.

(b) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2}) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2})$.

(c) Montrez que la transformation se fait en temps polynomial.

(d) En utilisant les deux exemples, montrez que, si $\mathcal{I}$ est une instance positive alors $\mathcal{J}$ est une instance positive.

(e) On suppose que $\mathcal{J}$ est une instance positive et on veut montrer que $\mathcal{I}$ est également positive. Il existe un sous-ensemble $Z \subset Y$ dont la somme des éléments est s.

i. Montrez que $x_i \in Z \Leftrightarrow \bar{x_i} \notin Z$.

ii. Soit $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ une clause de $\mathcal{I}$, montrez que l'un des entiers l_1 or l_2 or l_3 est dans X.

iii. En déduire que $\mathcal{I}$ est satifiable.

3. Déduire des questions précédentes que (SUBSET SUM) est NP-Complet.
4. Pour quels problèmes de l'exercice 1 pouvez vous maintenant affirmer qu'ils sont NP-Complets ou NP-difficiles ?

Exercice 3 — *(SET COVER est NP-Complet)*

On rappelle que (SUBSET SUM) est le problème suivant : soit X un ensemble, S un ensemble de sous-ensembles de X et $K \in \mathbb{N}$, existe-t-il un sous-ensemble C de S de taille inférieure à K couvrant X ? (c'est à dire que pour tout $x \in X$, il existe $s \in C$ tel que $x \in s$).

On veut démontrer que (SET COVER) est NP-Complet.

1. Montrez que le problème est dans NP.
2. Soit $\mathcal{I}$ une instance de (3-SAT ?), on veut transformer $\mathcal{I}$ en une instance $\mathcal{J}$ de (SET COVER) en temps polynomial telle que $\mathcal{I}$ est positive si et seulement si $\mathcal{J}$ est positive. On pose X l'ensemble d'éléments de $\mathcal{J}$, S l'ensemble de parties de X et K le nombre d'ensemble que l'on peut utiliser.

— On suppose que $\mathcal{I}$ a n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$

— X possèdera $n+m$ éléments $e_1, e_2, \ldots, e_{n+m}$ et S possèdera $2n$ éléments.

— Pour chaque variable x_i de $\mathcal{I}$, on ajoute deux ensembles x_i et $\bar{x_i}$ à S. Ces deux ensembles contiennent e_i.

— Si x_i appartient à la clause C_j, l'ensemble x_i contient e_{n+j}.

— Si $\bar{x_i}$ appartient à la clause C_j, l'ensemble $\bar{x_i}$ contient e_{n+j}.

— $K = n$

(a) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2 \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$.

(b) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2}) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2})$.

(c) Montrez que la transformation se fait en temps polynomial.

(d) En utilisant les deux exemples, montrez que, si $\mathcal{I}$ est une instance positive alors $\mathcal{J}$ est une instance positive.

(e) On suppose que $\mathcal{J}$ est une instance positive et on veut montrer que $\mathcal{I}$ est également positive. Il existe un sous-ensemble $C \subset S$ tels que chaque élément de X est dans au moins un ensemble de C et C contient au plus K ensembles.

i. Montrez que $x_i \in C \Leftrightarrow \bar{x_i} \notin C$.

ii. Soit $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ une clause de $\mathcal{I}$, montrez que $l_1 \in C$ ou $l_2 \in C$ ou $l_3 \in C$.

iii. En déduire que $\mathcal{I}$ est satifiable.

3. Déduire des questions précédentes que (SET COVER) est NP-Complet.
4. Pour quels problèmes de l'exercice 1 pouvez vous maintenant affirmer qu'ils sont NP-Complets ou NP-difficiles ?

Exercice 4 — *(CHROMA est NP-Complet)*

On rappelle que (CHROMA) est le problème suivant : soit $G = (V, E)$ un graphe et $K \in \mathbb{N}$, $K \leq |V|$, peut-on colorier V avec K couleurs de sorte que deux nœuds voisins dans G n'aient pas la même couleur.

On veut démontrer que (CHROMA) est NP-Complet.

1. Montrez que le problème est dans NP.
2. Soit $\mathcal{I}$ une instance de (3-SAT ?), on veut transformer $\mathcal{I}$ en une instance $\mathcal{J}$ de (CHROMA) en temps polynomial telle que $\mathcal{I}$ est positive si et seulement si $\mathcal{J}$ est positive. On pose $G = (V, E)$ le graphe $\mathcal{J}$ et K le nombre de couleurs que l'on peut utiliser.
   - On suppose que $\mathcal{I}$ a n variables $x_1, \ldots, x_n$ et m clauses $C_1, C_2, \ldots, C_m$
   - G possèdera $3n + m + 1$ nœuds.
   - Ajouter à G une clique de $n + 1$ nœuds $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.
   - Pour chaque variable x_i de $\mathcal{I}$, on ajoute deux nœuds x_i et $\bar{x_i}$ à V.
   - Pour chaque clause C_j de $\mathcal{I}$, on ajoute à V un nœud C_j.
   - On relie x_i et $\bar{x_i}$.
   - Si $i \neq j$ et $j < n + 1$, on relie x_i à y_j et $barx_i$ à y_j.
   - On relie y_{n+1} et C_j pour tout j.
   - Si x_i n'appartient pas à la clause C_j, relier x_i et C_j.
   - Si $\bar{x_i}$ n'appartient pas à la clause C_j, relier $\bar{x_i}$ et C_j.
   - $K = n + 1$

   (a) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (\bar{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2 \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3}) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$.

   (b) Décrivez $\mathcal{J}$ si $\mathcal{I} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x_2}) \wedge (\bar{x_1} \vee \bar{x_2})$.

   (c) Montrez que la transformation se fait en temps polynomial.

   (d) En utilisant les deux exemples, montrez que, si $\mathcal{I}$ est une instance positive alors $\mathcal{J}$ est une instance positive.

   (e) On suppose que $\mathcal{J}$ est une instance positive et on veut montrer que $\mathcal{I}$ est également positive. Il existe une coloration de G avec au plus K couleurs. Soit c_v la couleur du nœud v.

      i. Montrez que $c_{x_i} = c_{y_i}$ et $c_{\bar{x_i}} = c_{y_{n+1}}$ ou $c_{x_i} = c_{y_{n+1}}$ et $c_{\bar{x_i}} = c_{y_i}$.

      ii. Soit $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ une clause de $\mathcal{I}$, montrez que $c_{C_j} = c_{l_1}$ ou $c_{C_j} = c_{l_2}$ ou $c_{C_j} = c_{l_3}$.

      iii. En déduire que $\mathcal{I}$ est satifiable.

3. Déduire des questions précédentes que (CHROMA) est NP-Complet.
4. Pour quels problèmes de l'exercice 1 pouvez vous maintenant affirmer qu'ils sont NP-Complets ou NP-difficiles ?

Exercice 5 — *Quelques preuves*

1. Montrer que la relation de réduction est transitive.
2. Supposons qu'il existe un problème $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_N)$ tel que Π et $\Pi^c = (\mathcal{L}, \mathcal{L}_N, \mathcal{L}_Y)$ soient NP-Complets, montrer alors que NP = Co-NP
3. Un oracle pour Π est une machine capable de résoudre Π en temps constant. Que peut-on dire si on disposait d'un oracle pour résoudre (3-SAT ?) ?

Exercice 6 — *Réduction de Turing*

1. Montrer que la réduction polynomiale de Karp est un cas particulier de la réduction polynomiale de Turing.
2. Montrer que, pour tout problème Π de NP, il existe un problème de Co-NP tel qu'il existe une réduction polynomiale de Turing de ce problème vers Π et inversement.
3. En déduire que NP et Co-NP sont équivalent au sens de la réduction polynomiale de Turing.
4. Montrer que si NP $\neq$ Co-NP, alors il n'existe pas de problème de Co-NP qui soit NP-Complet et inversement si on utilise la réduction polynomiale de Karp.