TD 5 : Codage des entrées

Théorie de la complexité S5.

2022

Exercice 1 — ***Faiblement et fortement NP-Complet***

Pour chacun des problèmes NP-Complets du premier TD, déterminez s'il est faiblement ou fortement NP-Complet.

Exercice 2 — ***Quelques résultats***

1. Que prouve une réduction depuis un problème faiblement NP-Complet ?
2. Montrer que démontrer une réduction polynomiale de Karp d'un problème fortement NP-Complet Π_1 vers un problème Π_2 ne démontre pas que Π_2 est fortement NP-Complet.
3. Montrer que, si un problème est fortement NP-Complet (et est donc NP-Complet si on encode ses entiers en unaires), le problème est toujours NP-Complet si on encode ses entiers en binaire.

Exercice 3 — ***Faiblement et fortement polynomial***

1. L'algorithme du simplexe (résolvant des programmes linéaires) est-il fortement polynomial ? Si on se restreint aux programmes n'ayant pas plus de 2 variables, l'algorithme du simplexe est-il fortement polynomial ?
2. Décrivez un algorithme fortement polynomial pour calculer la moyenne de n nombres.
3. On veut calculer le n^{e} décimal de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton et Raphson.
   - Soit f une fonction strictement convexe et croissante sur $D \subset \mathbb{R}$, on recherche un réel $x \in D$ tel que $f(x) = 0$. (On suppose qu'un tel réel existe). Soit $x_0 \in D$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, montrez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et tend vers x.
   - Montrez que $x_n - x \leq f(x_n)/f'(x)$
   - Soit $f(x) = x^2 - 2$. Décrire un algorithme calculant le n^{e} décimal de $\sqrt{2}$.
   - Montrer que, si $x_0 < \sqrt{2} + 0.3$, l'algorithme s'arrête en n itérations. En déduire la complexité de l'algorithme. Est-il pseudo-polynomial, fortement polynomial ou faiblement polynomial ?

Exercice 4 — ***Graphe succinct*** Un circuit booléen C est un graphe orienté sans circuit contenant n sources représentant les entrées (1 ou 0), un unique puits représentant une sortie (1 ou 0 également). Les autres nœuds sont des portes logiques ET, OU et NON. Pour toute entrée $x \in \{0,1\}^n$, on note $C(x)$ la sortie associée.

Soit G un graphe non orienté contenant 2^n nœuds numérotés de 1 à 2^n. On définit la *représentation succinte* de G comme étant un circuit booléen C avec $2n$ entrées (dit autrement deux entrées x et y de taille n) tel que, pour tout couple de nœuds numérotés x et y, la sortie $C(x, y) = 1$ si et seulement si x et y sont reliés par une arête. Attention : tous les graphes n'ont pas une représentation succinte.

On veut prouver que le problème suivant est NP-Complet.

(TRIANGLE-SUCC ?) : soit C un circuit booléen représentant un graphe G, est-ce que G contient un triangle (une clique de taille 3) ?

1. Montrer que (TRIANGLE-SUCC ?) est dans NP.

2. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ tels que $V_1 \subset V_2$ et tels que ces deux graphes ont une représentation succinte, montrez que $G = (V_2, E_1 \cup E_2)$ possède une représentation succinte.
3. Soit φ une instance de (SAT ?) avec n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ le graphe suivant. V_φ contient $2^n + 1$ nœuds : $(v_0, v_1, \ldots, v_{2^n})$. On relie v_i et v_{2^n} si E_φ si et seulement si, quand on affecte VRAI à x_j si le j^{e} bit de la représentation binaire de i est 1 et FAUX sinon, φ est satisfaite. Montrez que G_φ possède une représentation succinte.
4. Soit $G_2 = (V_2, E_2)$ le graphe contenant 2^n+2 nœuds $(v_0, v_1, \ldots, v_{2^n+1})$ et où chaque nœud est relié à v_{2^n+1} (excepté v_{2^n+1} lui-même). Montrer que G_2 possède une représentation succinte.
5. En déduire que $G = (V_2, E_\varphi \cup E_2)$ possède une représentation succinte.
6. Montrez G possède un triangle si et seulement si φ est satisfiable.
7. En déduire que (TRIANGLE-SUCC) is NP-Complete.