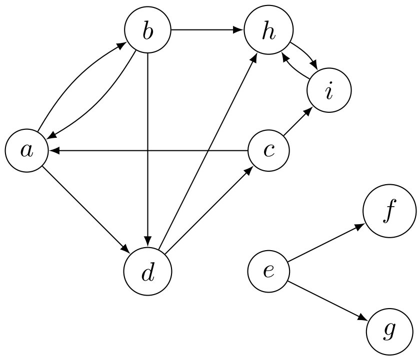
Tutorial 1 : Basic definitions

Graph theory, 1st semester.

2022

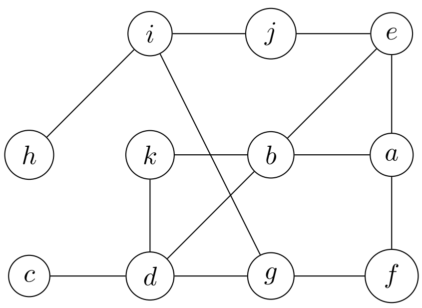
Exercise 1 — ***Some definitions***

Let G be the following graph :



1. We write $G = (X, U)$, write X and U.
2. Give $\Gamma(a)$, $\Gamma(b)$ and $\Gamma(c)$.
3. Give the connected components.
4. Give the boolean matrix associated with the connected component containing six nodes.
5. Give an example of path, of cycle, of directed path and of directed cycle of G.
6. Let $G1 = (X1, U1)$ the (induced) subgraph defined by $X1 = \{a, b, c, d\}$. Draw $G1$. Is this graph connected ? Strongly connected ? Answer the same questions with $G2 = (X2, U2)$ and $X2 = \{e, f, g\}$.
7. Give the arcs entering d and its in-degree. Give the arc outgoing from b and its out-degree.
8. Give a partial graph of G and a partial subgraph of G.

Exercise 2 — ***Depth first search and Breadth first search***

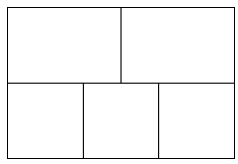


1. (a) Run the depth first search algorithm with the previous graph starting from a node of your choice.
   (b) Why can you affirm that this graph is connected ?
   (c) What is the complexity of the algorithm ?

2. (a) Run the breadth first search algorithm with the previous graph starting from a node of your choice.
   (b) Why can you affirm that this graph is connected ?
   (c) What is the complexity of the algorithm ?

▶ **Correction**

Exercise 3 — ***A crossing problem***



Is it possible to draw a (non-strait) continuous line such that every segment of the previous figure is crossed exactly once by this line ? Model this problem with a graph problem and solve it.

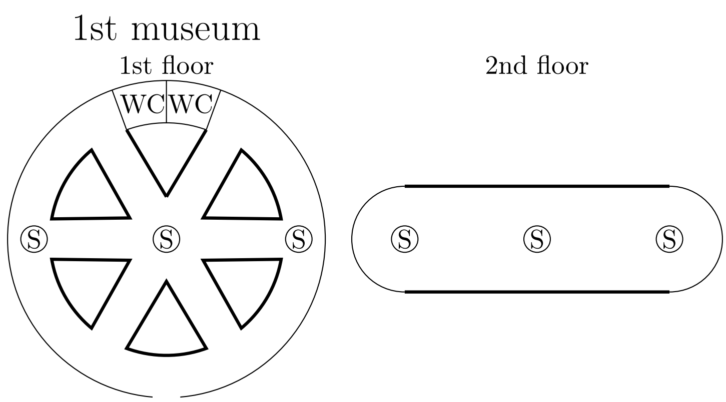
▶ **Correction**

Attention à modéliser correctement. Il peut être bon de voir s'ils se posent la question, par exemple, de si les coins compte pour un seul segment ou deux. Il est important ici de bien faire comprendre la différence entre une modélisation, qui pose formellement les choses, et le problème qui est écrit en langue naturelle (et donc non formelle). Enfin, il faut écrire pourquoi la modélisation semble bonne (ceci est, en théorie, impossible à prouver car le problème de base n'est pas écrit formellement, il reste donc des ambiguités ou des zones d'ombre).

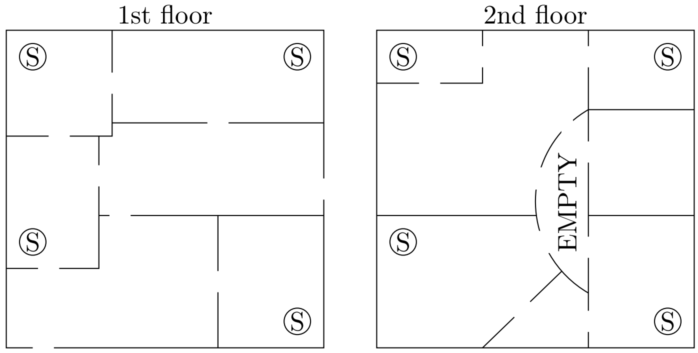
Ici, une bonne modélisation consiste à créer un graphe avec 1 nœud par zone (y compris l'extérieur) et à relier deux nœuds s'ils sont séparés par un segment (plusieurs s'ils y a plusieurs segments), puis on recherche un cycle eulérien.

Exercise 4 — ***Museum itinerary***

We want to decide the route inside a museum such that no two person goes more than once in front of a painting. The maps of two museum are drawn hereinafter. The rounded S are stairs. In the first museum, paintings are hooked on the walls that are drawn with thick lines. In the second museum, the works are placed every where in the rooms (not only on the wall), except in the empty room.



2nd museum



1. Model this problem in the first museum with a graph problem and solve it.
2. Model this problem in the second museum with a graph problem and solve it.
3. Why is the model not the same ?

► **Correction**

1. Chaque couloir est une arête d'un graphe et chaque intersection un nœud. On ne modélise pas les escaliers par des arêtes (car il n'y a pas de tableau dans les escaliers.) On suppose qu'on peut les emprunter autant de fois qu'on veut. On peut donc fusionner les extrêmités des escaliers en un seul nœud. On peut enfin supposer que les couloirs du 2e etages peuvent se visiter en une traversée.

   On cherche dans ce graphe un cycle eulérien afin de pouvoir revenir à l'entrée du musée.
2. Chaque salle est un nœud, sauf la salle vide. On relie deux salles si elles sont reliées par une porte, par la salle vide ou par un escalier. On cherche une chaîne hamiltonienne reliant les deux portes.
3. Bien que les 2 problématiques soient les mêmes, les modélisations sont différentes. C'est dû à la forme des musées. Dans le 1e musée, les salles sont des couloirs étroits où il est difficile de faire demi-tour. Dans le 2e, les salles sont grandes et on peut, une fois dedans, les visiter comme on le souhaite.

   Il est intéressant d'essayer d'appliquer la modélisation hamiltonienne au premier musée et la modélisation eulérienne au second musée. On voit alors apparaître très clairement où les problèmes surviennent.