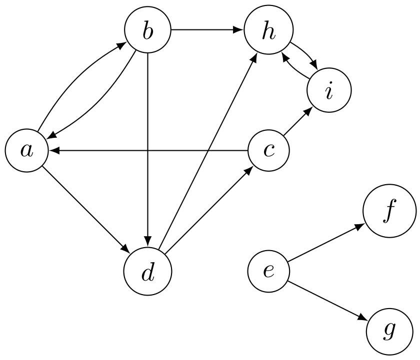
TD 1 : Définitions de base

Théorie des graphes S1.

2022

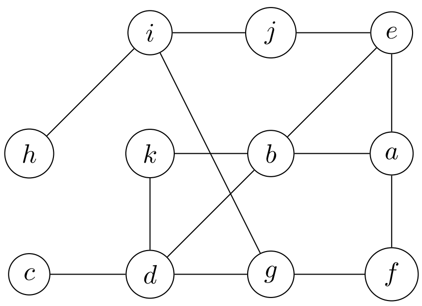
Exercice 1 — *Quelques définitions*

Soit G le graphe suivant :



1. On note $G = (X, U)$. Écrire X et U.
2. Donner $\Gamma(a)$, $\Gamma(b)$ et $\Gamma(c)$.
3. Donner les composantes connexes.
4. Donner la matrice booléenne associée à la composante connexe de six sommets.
5. Donner un exemple de chemin, de cycle, de chaîne et de circuit de G.
6. Soit $G1 = (X1, U1)$ le sous-graphe (induit) défini par $X1 = \{a, b, c, d\}$. Dessiner $G1$. Est-il connexe ? Est-il fortement connexe ? Mêmes questions pour $G2 = (X2, U2)$ avec $X2 = \{e, f, g\}$.
7. Donner les arcs incidents intérieurement à d et son demi-degré intérieur. Donner les arcs incidents extérieurement à b et son demi degrés extérieurs.
8. Donner un graphe partiel de G, puis un sous-graphe partiel de G.

Exercice 2 — *Parcours en profondeur et en largeur*



1. (a) Appliquer l'algorithme de parcours en profondeur au graphe ci-dessus en partant du nœud de votre choix.

   (b) Pourquoi pouvez-vous affirmer que ce graphe est connexe ?

(c) Quelle est la complexité de l'algorithme ?

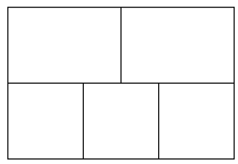
2. (a) Appliquer l'algorithme de parcours en largeur au graphe ci-dessus en partant du nœud de votre choix.

   (b) Pourquoi pouvez-vous affirmer que ce graphe est connexe ?

   (c) Quelle est la complexité de l'algorithme ?

▶ **Correction**

Exercice 3 — *Un petit problème de croisement*



Est-il possible de tracer une ligne continue telle que tout segment est coupé exactement une fois par cette ligne ? Modéliser le problème par un problème de graphe et le résoudre.

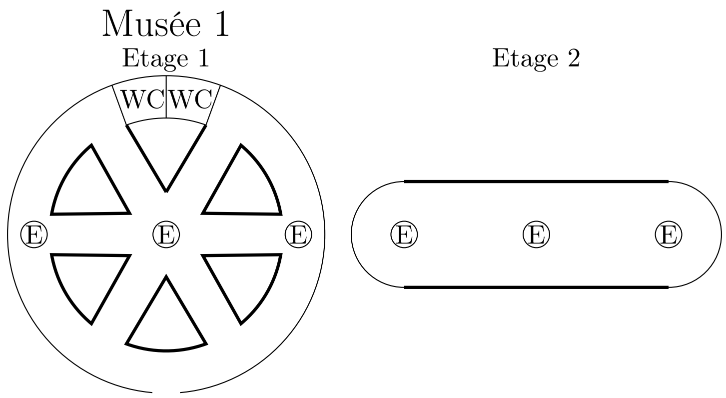
▶ **Correction**

Attention à modéliser correctement. Il peut être bon de voir s'ils se posent la question, par exemple, de si les coins compte pour un seul segment ou deux. Il est important ici de bien faire comprendre la différence entre une modélisation, qui pose formellement les choses, et le problème qui est écrit en langue naturelle (et donc non formelle). Enfin, il faut écrire pourquoi la modélisation semble bonne (ceci est, en théorie, impossible à prouver car le problème de base n'est pas écrit formellement, il reste donc des ambiguités ou des zones d'ombre).

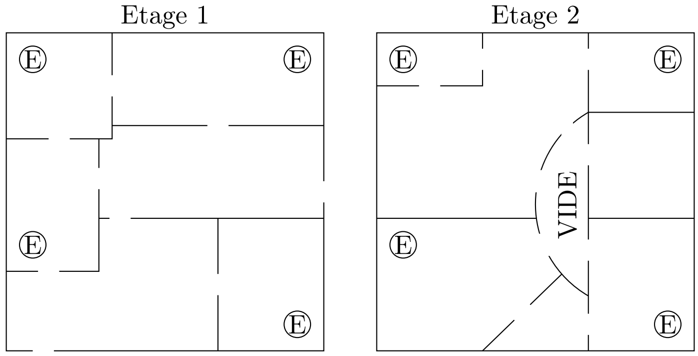
Ici, une bonne modélisation consiste à créer un graphe avec 1 nœud par zone (y compris l'extérieur) et à relier deux nœuds s'ils sont séparés par un segment (plusieurs s'ils y a plusieurs segments), puis on recherche un cycle eulérien.

Exercice 4 — *Parcours de musée*

On souhaite tracer le parcours d'un musée de sorte que chaque personne ne passe pas plus d'une fois devant la même oeuvre. Voici deux plans de musées. Les E entourés sont des escaliers. Dans le musée 1, des tableaux sont accrochés sur les murs dessinés en gras. Dans le musée 2, les oeuvres sont disposés dans les salles (pas forcément au mur) sauf dans la salle vide.



Musée 2



1. Modéliser ce problème dans le musée 1 sous forme d'un problème de graphe et résolvez le.
2. Modéliser ce problème dans le musée 2 sous forme d'un problème de graphe et résolvez le.
3. Pourquoi la modélisation n'est-elle pas la même, qu'est-ce qui a changé ?

► **Correction**

1. Chaque couloir est une arête d'un graphe et chaque intersection un nœud. On ne modélise pas les escaliers par des arêtes (car il n'y a pas de tableau dans les escaliers.) On suppose qu'on peut les emprunter autant de fois qu'on veut. On peut donc fusionner les extrêmités des escaliers en un seul nœud. On peut enfin supposer que les couloirs du 2e etages peuvent se visiter en une traversée.

   On cherche dans ce graphe un cycle eulérien afin de pouvoir revenir à l'entrée du musée.
2. Chaque salle est un nœud, sauf la salle vide. On relie deux salles si elles sont reliées par une porte, par la salle vide ou par un escalier. On cherche une chaîne hamiltonienne reliant les deux portes.
3. Bien que les 2 problématiques soient les mêmes, les modélisations sont différentes. C'est dû à la forme des musées. Dans le 1e musée, les salles sont des couloirs étroits où il est difficile de faire demi-tour. Dans le 2e, les salles sont grandes et on peut, une fois dedans, les visiter comme on le souhaite.

   Il est intéressant d'essayer d'appliquer la modélisation hamiltonienne au premier musée et la modélisation eulérienne au second musée. On voit alors apparaître très clairement où les problèmes surviennent.