Tutorial 2 : Transitive closure

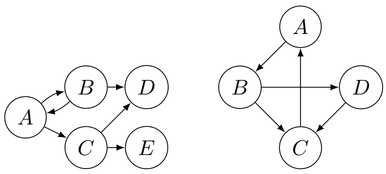
Graph theory, 1st semester.

2022

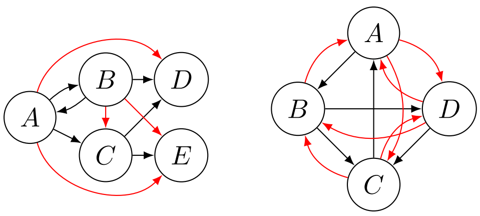
Exercise 1 — ***Some examples and properties***

Two graphs G and G' are **τ-equivalent** if $\tau(G) = \tau(G')$. A partial graph G' of G is **τ-minimal τ-équivalent** to G if it is τ-equivalent to G and, if we remove an arc of G', we get a graph that is not τ-equivalent to G. A graph G' is **τ-minimum τ-équivalent** to G if it is **τ-minimal τ-équivalent** to G and minimizes the number of arcs.

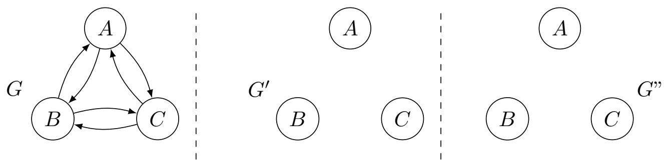
1. Draw the transitive closure of the following graphs :



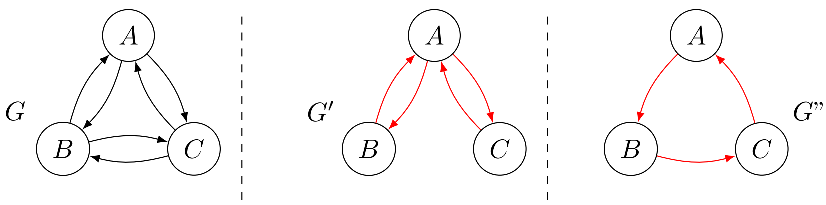
▶ **Correction**



2. Add some arcs to G' and G” such that G' and G” are τ-minimal τ-equivalent to G and G” contains strictly less arcs than G'.



▶ **Correction**



3. Show that G is strongly connected if and only if the circuit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is τ-equivalent to G, where the x_is are the nodes of G.

▶ **Correction**

Soit G' le graphe correspondant au cycle $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, alors, dans G', il existe un chemin entre tout couple de nœuds, donc $\tau(G')$ est un graphe complet orienté. $G = (X, U)$ est fortement connexe si et seulement s'il existe un chemin entre tout couple de nœuds dans G si et seulement si $\tau(G)$ est un graphe complet orienté si et seulement si $\tau(G) = \tau(G')$.

4. Show that the previous property is false if we replace τ-equivalent by τ-minimal τ-equivalent.

▶ **Correction**

On peut prendre par exemple les graphe G' et G'' de la question 2, puisque G'' n'est pas un sous graphe de G', il n'est pas τ-minimal τ-équivalent.

5. Show that an elementary circuit is τ-minimum τ-equivalent to itself.

▶ **Correction**

Tout graphe est τ-équivalent à lui-même. Soit maintenant G' le graphe où plusieurs arêtes de G ont été retirées. Puisque G est un cycle, si on retire une arête, on perd la forte connexité de G. D'après la question 3, G' n'est pas τ-équivalent à G. Donc G est τ-minimum τ-équivalent à G.

6. Show that a graph G is hamiltonian if and only if, every graph τ-minimum τ-equivalent to G is an hamiltonian circuit of G.

▶ **Correction**

Si tout graphe τ-minimum τ-équivalent à G est un circuit hamiltonien de G, alors G possède un sous graphe qui est un circuit hamiltonien de G donc G est hamiltonien. Si G est hamiltonien, alors il possède un circuit hamiltonien et est donc fortement connexe. Ce circuit est, d'après la question 3, τ-équivalent à G et, d'après la question 5, τ-minimal τ-équivalent à G. Soit maintenant un sous-graphe de G' avec strictement moins de n arêtes. Alors nécessairement il existe un nœud de G' qui n'a pas d'arc sortant, donc G' n'est pas fortement connexe donc G' n'est pas τ-équivalent à G. Donc le circuit hamiltonien est τ-minimal τ-équivalent.

Exercise 2 — τ *equivalent graph of a acyclic digraph*

Let G be a directed acyclic graph. Show that there exists a unique graph G' that is τ-equivalent to G and that minimize the number of arcs. Show that G' is a partial graph of G.

▶ **Correction**

Soit la procédure suivante :

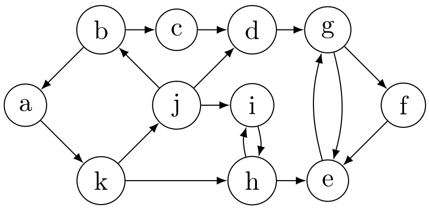
— Tant qu'il existe un arc (u, v) tel que G privé de cet arc est τ-équivalent à G, supprimer (u, v).

Soit G' le graphe obtenu, G' est τ-minimal τ-équivalent à G par construction. Soit maintenant G'' un autre graphe τ-équivalent à G contenant un arc (u, v) de G qui ne soit pas dans G'. Les graphes G'' et G' sont τ-équivalent car il le sont avec G. Donc il existe dans G' un chemin $u = u_1, u_2, \ldots, u_p = v$ entre u et v avec $p > 2$. Donc il existe dans G'' un chemin entre u_i et u_{i+1} pour tout $i \leq p - 1$. Puisque le graphe est sans circuit, aucun de ces chemins n'utilise l'arc (u, v) et donc il existe dans G'' un chemin entre u et v n'utilisant pas l'arc (u, v). Donc G'' n'est pas τ-minimal. Donc tout graphe τ-minimal ne contient que des arcs de G', donc sont égaux à G' car G' est τ-minimal. Donc G' est τ-minimum et est unique.

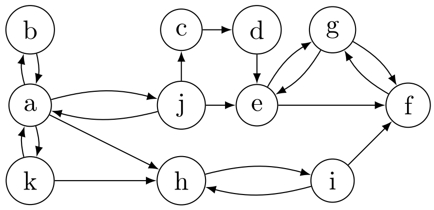
Exercise 3 — τ-*equivalent graphs and reduced graphs*

Let G_1 and G_2 be the two following graphs :

G_1



G_2



1. Compute the transitive closures of G_1 and G_2.
2. Compute the reduced graphs G_{1R} and G_{2R} of G_1 and G_2.
3. Compute the transitive closures of G_{1R} and G_{2R}.
4. Show that two graphs are τ-equivalent if and only if their reduced graphs are τ-equivalent.

▶ **Correction**

Pour la démonstration, bien réécrire les étapes, les définitions, ... Ca prend du temps mais ce n'est pas du temps perdu que de leur montrer comment on rédige une preuve.

Montrer qu'il existe un chemin de u vers v dans G ssi il existe un chemin de la composante fortement connexe de u vers celle de v dans GR est un bon point de départ.

— Soient u et v des nœuds de G et ur et vr leur composante fortement connexe. Il existe un chemin dans G depuis un nœud u vers un nœud de v

— ssi il existe une suite de composante fortement connexes $(ur = ur0, ur1, ur2, \ldots, urp = vr)$ de GR telles que dans G il existe un nœud ei (pour $i > 0$) et un nœud oi (pour $i < p$) de uri et $e(i+1)$ de $ur(i+1)$ tels que oi est relié par un arc à $e(i+1)$ (et, par définition, ei est relié par un chemin à oi dans la composante uri).

— ssi il existe une suite de composante fortement connexes $(ur = ur0, ur1, ur2, \ldots, urp = vr)$ de GR telles que uri est relié par un arc à $ur(i+1)$.

— ssi il existe un chemin dans GR de ur vers vr.

Supposons que $G1$ et $G2$ sont τ équivalents.

— Deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ équivalent ssi ils ont même fermeture transitive donc $G1$ et $G2$ ont les mêmes nœuds U

— Donc deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ équivalent ssi pour tout u, v de U, il existe un chemin de u vers v dans G1 ssi il existe un chemin de u vers v dans G2.

— Montrons que $G1$ et $G2$ ont les mêmes composantes fortement connexe.

  — Soient u et v deux nœuds de U, u et v sont dans la même composante fortement connexe de $G1$ ssi il existe un chemin de u à v et un chemin de v vers u

  — ssi il existe un chemin de u vers v et un chemin de v vers u dans $G2$

  — ssi u et v sont dans la même composante fortement connexe de $G2$.

  Donc les graphes réduits de $G1$ et $G2$ ont les mêmes nœuds UR.

— Montrons que les deux graphes réduits sont τ-équivalents.

  — Soient deux nœuds ur et vr de UR. Il existe un chemin de ur vers vr dans $G1R$

  — ssi il existe un chemin dans $G1$ depuis un nœud u de ur vers un nœud de v de vr

  — ssi il existe un chemin dans $G2$ depuis un nœud u de ur vers un nœud de v de vr

  — ssi il existe un chemin de ur vers vr dans $G2R$.

Supposons que $G1R$ et $G2R$ sont τ équivalents.

— $G1R$ et $G2R$ sont τ équivalents ssi ils ont même fermeture transitive donc les graphes $G1$ et $G2$ ont les mêmes composantes fortement connexes et donc à fortiori les mêmes nœuds U.

— Montrons que les deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ-équivalents.

— Soit u et v deux nœuds de U de composantes fortement connexe respectives ur et vr. Il existe un chemin de u vers v dans $G1$

— ssi il existe un chemin depuis ur vers vr dans $G1R$

— ssi il existe un chemin depuis ur vers vr dans $G2R$

— ssi il existe un chemin depuis u vers v dans $G2$

Exercise 4 — *Compute the transitive closure of a graph*

1. Describe with pseudo code an algorithm computing the transitive closure of a graph using the classical algorithms enumerating the nodes of a graph. What is its complexity ?

   ▶ **Correction**

   On fait un parcours (en largeur ou en profondeur) pour chaque nœud pour connaitre ses descendants. On relie ce nœud à ces descendants. Cet algorithme est en $O(n*(n+m)$.

2. (a) Let A be the adjacency matrix of a graph G. What is A^p ?

   ▶ **Correction**

   A^p est la matrice des chemins de taille exactement p (il existe un chemin de taille p entre u et v ssi $A^p(u,v) = 1$)

   (b) Let B be the adjacency matrix of a graph G with 1 on the diagonal cells. What is B^p ?

   ▶ **Correction**

   B^p est la matrice des chemins de taille au plus p (il existe un chemin de taille au plus p entre u et v ssi $B^p(u,v) = 1$)

   (c) Describe in pseudocode an algorithm computing the transitive closure of a graph using the powers of either the matrix A or the matrix B. What is its complexity ?

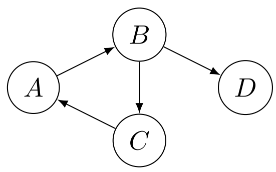
   ▶ **Correction**

   La matrice $\sum_{i=1}^{n} A^i = B^n$ est la matrice d'adjacence de $\tau(G)$. L'algorithme est en $O(n^4)$ si on multiplie les matrices bêtement.

3. The Roy Wharshall algorithm is the following :

Require: A directed graph $G = (U, A)$
Ensure: The transitive closure of G
  for $w \in U$ **do**
    for $u \in U$ **do**
      for $v \in U$ **do**
        if $(u, w) \in A$ and $(w, v) \in A$ **then** Add (u, v) to A.

   (a) Run the algorithm on the following graph :



   (b) What is its complexity ?

▶ **Correction**

$O(n^3)$

(c) Describe the algorithm using only the adjacency matrix of G.

(d) Run the algorithm on the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercise 5 — *Equipment of a workshop*

Nine machines, a, b ..., h and i, are installed in a workshop. Mechanical parts are produced by successive machines (drills, polishers, welds, ...). We want to build conveyor belts at minimum cost in order to move the pieces from a machine to another. The following array gives, for each machine M, which machines may be used in a next step to build a product. We must link M to each of those machines by a succession of belts. Model this problem with a graph problem and solve it.

a	b, c, d, e, f, g, h, i
b	a, c, d, e, f, g, h, i
c	d, e
d	e
e	d
f	d, e, g, h, i
g	d, e, f, h, i
h	d, e, f, g, i
i	d, e, f, g, h