TD 2 : Fermeture transitive

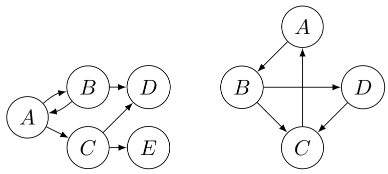
Théorie des graphes S1.

2022

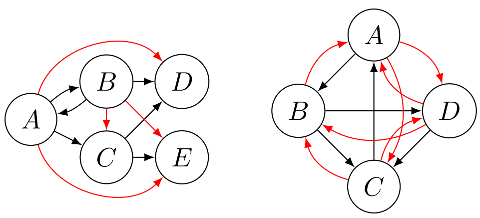
Exercice 1 — *Quelques exemples et propriétés*

Deux graphes G et G' sont dits **τ-équivalents** si $\tau(G) = \tau(G')$. Un graphe G' est dit **τ-minimal τ-équivalent** à G si G' est un graphe partiel de G, τ-équivalent à G et si on retire un arc de G', on obtient un graphe qui n'est pas τ-équivalent à G. Un graphe G' est dit **τ-minimum τ-équivalent** à G s'il est **τ-minimal τ-équivalent** avec un nombre minimum d'arcs.

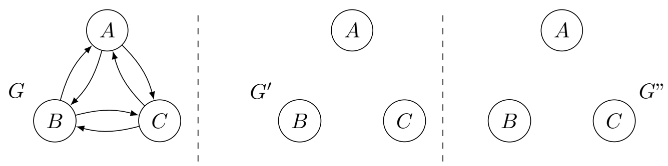
1. Dessinez la fermeture transitive des graphes suivants :



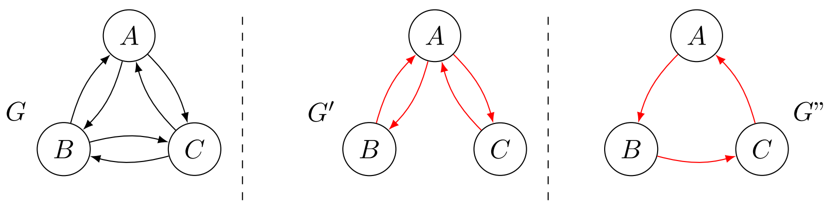
▶ Correction



2. Ajoutez aux graphes G' et G" des arcs tels que G' et G" sont τ-minimal τ-équivalent à G et G" possède strictement moins d'arc que G'.



▶ Correction



3. Montrez que G est fortement connexe si et seulement si le circuit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est τ-équivalent à G, où les x_i sont les nœuds de G.

▶ **Correction**

Soit G' le graphe correspondant au cycle $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, alors, dans G', il existe un chemin entre tout couple de nœuds, donc $\tau(G')$ est un graphe complet orienté. $G = (X, U)$ est fortement connexe si et seulement s'il existe un chemin entre tout couple de nœuds dans G si et seulement si $\tau(G)$ est un graphe complet orienté si et seulement si $\tau(G) = \tau(G')$.

4. Montrez que la question précédente est fausse si on remplace τ-équivalent par τ-minimal τ-équivalent.

▶ **Correction**

On peut prendre par exemple les graphe G' et G'' de la question 2, puisque G'' n'est pas un sous graphe de G', il n'est pas τ-minimal τ-équivalent.

5. Montrez qu'un circuit élémentaire est τ-minimum τ-équivalent à lui-même.

▶ **Correction**

Tout graphe est τ-équivalent à lui-même. Soit maintenant G' le graphe où plusieurs arêtes de G ont été retirées. Puisque G est un cycle, si on retire une arête, on perd la forte connexité de G. D'après la question 3, G' n'est pas τ-équivalent à G. Donc G est τ-minimum τ-équivalent à G.

6. Montrez qu'un graphe G est hamiltonien si et seulement si tout graphe τ-minimum τ-équivalent à G est un circuit hamiltonien de G.

▶ **Correction**

Si tout graphe τ-minimum τ-équivalent à G est un circuit hamiltonien de G, alors G possède un sous graphe qui est un circuit hamiltonien de G donc G est hamiltonien. Si G est hamiltonien, alors il possède un circuit hamiltonien et est donc fortement connexe. Ce circuit est, d'après la question 3, τ-équivalent à G et, d'après la question 5, τ-minimal τ-équivalent à G. Soit maintenant un sous-graphe de G' avec strictement moins de n arêtes. Alors nécessairement il existe un nœud de G' qui n'a pas d'arc sortant, donc G' n'est pas fortement connexe donc G' n'est pas τ-équivalent à G. Donc le circuit hamiltonien est τ-minimal τ-équivalent.

Exercice 2 — *τ-equivalence d'un graphe sans circuit*

Soit G un graphe orienté sans circuit. Montrer qu'il existe un unique graphe G' qui soit τ-équivalent à G et qui minimise le nombre d'arcs. Montrer que G' est un graphe partiel de G

▶ **Correction**

Soit la procédure suivante :

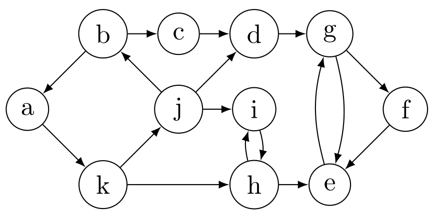
— Tant qu'il existe un arc (u, v) tel que G privé de cet arc est τ-équivalent à G, supprimer (u, v).

Soit G' le graphe obtenu, G' est τ-minimal τ-équivalent à G par construction. Soit maintenant G'' un autre graphe τ-équivalent à G contenant un arc (u, v) de G qui ne soit pas dans G'. Les graphes G'' et G' sont τ-équivalent car il le sont avec G. Donc il existe dans G' un chemin $u = u_1, u_2, \ldots, u_p = v$ entre u et v avec $p > 2$. Donc il existe dans G'' un chemin entre u_i et u_{i+1} pour tout $i \leq p - 1$. Puisque le graphe est sans circuit, aucun de ces chemins n'utilise l'arc (u, v) et donc il existe dans G'' un chemin entre u et v n'utilisant pas l'arc (u, v). Donc G'' n'est pas τ-minimal. Donc tout graphe τ-minimal ne contient que des arcs de G', donc sont égaux à G' car G' est τ-minimal. Donc G' est τ-minimum et est unique.

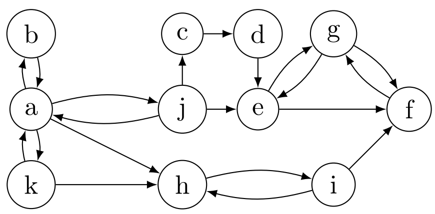
Exercice 3 — *τ-équivalence et graphes réduits*

Soient G_1 et G_2 les graphes suivants :

G_1



G_2



1. Calculez les fermetures transitives des graphes G_1 et G_2.
2. Calculer les graphes réduits G_{1R} et G_{2R} de G_1 et G_2.
3. Calculez les fermetures transitives des graphes G_{1R} et G_{2R}.
4. Montrer que deux graphes sont τ-équivalents ssi leurs graphes réduits sont τ-équivalents.

► **Correction**

Pour la démonstration, bien réécrire les étapes, les définitions, ... Ca prend du temps mais ce n'est pas du temps perdu que de leur montrer comment on rédige une preuve.

Montrer qu'il existe un chemin de u vers v dans G ssi il existe un chemin de la composante fortement connexe de u vers celle de v dans GR est un bon point de départ.

— Soient u et v des nœuds de G et ur et vr leur composante fortement connexe. Il existe un chemin dans G depuis un nœud u vers un nœud de v

— ssi il existe une suite de composante fortement connexes $(ur = ur0, ur1, ur2, \dots, urp = vr)$ de GR telles que dans G il existe un nœud ei (pour $i > 0$) et un nœud oi (pour $i < p$) de uri et $e(i+1)$ de $ur(i+1)$ tels que oi est relié par un arc à $e(i+1)$ (et, par définition, ei est relié par un chemin à oi dans la composante uri).

— ssi il existe une suite de composante fortement connexes $(ur = ur0, ur1, ur2, \dots, urp = vr)$ de GR telles que uri est relié par un arc à $ur(i+1)$.

— ssi il existe un chemin dans GR de ur vers vr.

Supposons que $G1$ et $G2$ sont τ équivalents.

— Deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ équivalent ssi ils ont même fermeture transitive donc $G1$ et $G2$ ont les mêmes nœuds U

— Donc deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ équivalent ssi pour tout u, v de U, il existe un chemin de u vers v dans G1 ssi il existe un chemin de u vers v dans G2.

— Montrons que $G1$ et $G2$ ont les mêmes composantes fortement connexe.

  — Soient u et v deux nœuds de U, u et v sont dans la même composante fortement connexe de $G1$ ssi il existe un chemin de u à v et un chemin de v vers u

  — ssi il existe un chemin de u vers v et un chemin de v vers u dans $G2$

  — ssi u et v sont dans la même composante fortement connexe de $G2$.

  Donc les graphes réduits de $G1$ et $G2$ ont les mêmes nœuds UR.

— Montrons que les deux graphes réduits sont τ-équivalents.

  — Soient deux nœuds ur et vr de UR. Il existe un chemin de ur vers vr dans $G1R$

  — ssi il existe un chemin dans $G1$ depuis un nœud u de ur vers un nœud de v de vr

  — ssi il existe un chemin dans $G2$ depuis un nœud u de ur vers un nœud de v de vr

  — ssi il existe un chemin de ur vers vr dans $G2R$.

Supposons que $G1R$ et $G2R$ sont τ équivalents.

— $G1R$ et $G2R$ sont τ équivalents ssi ils ont même fermeture transitive donc les graphes $G1$ et $G2$ ont les mêmes composantes fortement connexes et donc à fortiori les mêmes nœuds U.

— Montrons que les deux graphes $G1$ et $G2$ sont τ-équivalents.

— Soit u et v deux nœuds de U de composantes fortement connexe respectives ur et vr. Il existe un chemin de u vers v dans $G1$
— ssi il existe un chemin depuis ur vers vr dans $G1R$
— ssi il existe un chemin depuis ur vers vr dans $G2R$
— ssi il existe un chemin depuis u vers v dans $G2$

Exercice 4 — *Calculer la fermeture transitive d'un graphe*

1. Décrire en français un algorithme calculant la fermeture transitive d'un graphe en utilisant les algorithmes de parcours de graphe. Quelle est sa complexité ?

▶ **Correction**

On fait un parcours (en largeur ou en profondeur) pour chaque nœud pour connaitre ses descendants. On relie ce nœud à ces descendants. Cet algorithme est en $O(n * (n + m)$.

2. (a) Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G. Que représente A^p ?

▶ **Correction**

A^p est la matrice des chemins de taille exactement p (il existe un chemin de taille p entre u et v ssi $A^p(u, v) = 1$)

(b) Soit B la matrice A avec des 1 sur la diagonale. Que représente B^p ?

▶ **Correction**

B^p est la matrice des chemins de taille au plus p (il existe un chemin de taille au plus p entre u et v ssi $B^p(u, v) = 1$)

(c) Décrire un algorithme en français utilisant les puissances de la matrice A ou de B pour calculer la fermeture transitive d'un graphe. Quelle est sa complexité ?

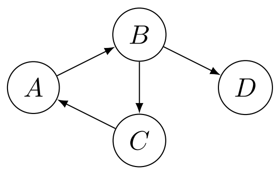
▶ **Correction**

La matrice $\sum_{i=1}^{n} A^i = B^n$ est la matrice d'adjacence de $\tau(G)$. L'algorithme est en $O(n^4)$ si on multiplie les matrices bêtement.

3. L'algorithme de Roy-Warshall est le suivant :

Entrées: Un graphe orienté $G = (U, A)$
Sorties: La fermeture transitive de G
  Pour $w \in U$ **Faire**
    Pour $u \in U$ **Faire**
      Pour $v \in U$ **Faire**
        Si $(u, w) \in A$ et $(w, v) \in A$ **Alors** Ajouter (u, v) à A.

(a) Testez l'algorithme sur le graphe suivant :



(b) Quelle est la complexité de cet algorithme ?

▶ **Correction**

$O(n^3)$

(c) Redécrire l'algorithme en utilisant la matrice d'adjacence de G.

(d) Testez l'algorithme sur le graphe décrit par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 — *Équipement d'un atelier*

Dans un grand atelier sont installées neuf machines, a, b, …, h et i. Les pièces mécaniques qui y sont fabriquées doivent passer successivement sur plusieurs machines (perceuses, soudeuses, polisseuses, …). On désire construire, pour un coût minimum, des tapis roulants permettant de conduire les pièces d'une machine à une autre machine. Le tableau ci-dessous indique pour chaque machine M quelles sont les machines qui peuvent suivrent dans la chaîne de production. On doit donc relier M à chacune de ces machines par une succession de tapis roulant. Modélisez ce problème par un problème graphe et résolvez le.

a	b, c, d, e, f, g, h, i
b	a, c, d, e, f, g, h, i
c	d, e
d	e
e	d
f	d, e, g, h, i
g	d, e, f, h, i
h	d, e, f, g, i
i	d, e, f, g, h