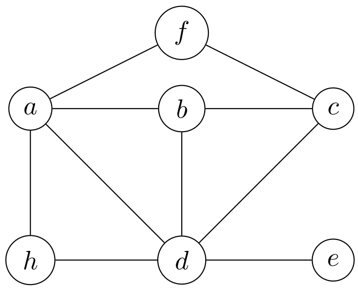
Tutorial 3 :Cliques and independent sets

Graph theory, 1st semester.

2022

Exercise 1 — ***Some definitions***

Let G be the following graph :



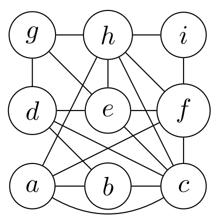
The weights associated with the nodes are $p(a) = 3$, $p(b) = 2$, $p(c) = 2$, $p(d) = 4$, $p(e) = 1$, $p(f) = 1$ and $p(h) = 1$.

1. Give a maximal independent set of G
2. Give a maximum independent set of G
3. Give a maximum weight independent set of G

▶ Correction

1. c, a, e
2. f, b, h, e. Il est maximum car s'il existait un stable de taille 5, il ne contiendrait pas a, b, c, ou d du fait de leur degré et donc il ne resterait que e, f et h.
3. c, a, e de poids 6. De manière similaire à précédemment, a ne peut appartenir à un stable de poids supérieur à 6 car il ne pourrait contenir que a, c et e ; b ne peut appartenir à un stable de poids supérieur à 6 car il ne pourrait contenir que b, f, h et e ; de même pour d. Il ne reste donc que f, c, e, et h comme candidats dont la somme des poids est 6, on ne peut atteindre 7.

Exercise 2 — ***Clique and stable***



1. Find in G a maximal clique, a maximum clique and a partition of the nodes of G into 3 cliques.
2. Show that finding a clique in a graph is equivalent to searching for a maximum independent set in another graph. Which one ? Give an example with G.

▶ **Correction**

1. g, d, e ; h, i, f et a, b, c
2. on prend le graphe complémentaire

Exercise 3 — *Stable set and degree*

Let G be a graph such that $1 \leq d(x_1) \leq \ldots \leq d(x_n)$ and there exists p in $[\![2;n]\!]$ such that $\sum_{i=0}^{p-2} d(x_{n-i}) \leq n-p$. Show that every maximal stable set has at least p nodes.

▶ **Correction**

Supposons qu'il existe un stable maximal S avec au plus $p-1$ nœuds.

Soient $(v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ les nœuds de S. On suppose, sans perte de généralité, que $d(v_i) \leq d(v_j)$ pour tout $i < j$. Alors, pour tout $j \in [\![0; p-2$
rrbracket, $d(v_{p-1-j} \leq d(x_{n-j}$. Donc, par hypothèse,

$$\sum_{i=0}^{p-2} d(v_{p-1-i}) \leq n-p$$

or S est un stable maximal, donc chacun des autre nœuds est relié à au moins un nœud de S. Il y a au moins $n-(p-1)$ nœuds qui ne sont pas dans S. Donc $\sum_{i=0}^{p-2} d(v_{p-1-i})$ vaut au moins $n-(p-1)$.

Ceci contredit l'inégalité précédente.

Exercise 4 — *independent set as a set of equations*

1) Let P be the following problem :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} Max & t+u+v+w+x+y+z & \\ s.c. & & \\ & x+y+z & \leq \ 1 \\ & z+t+u & \leq \ 1 \\ & x+v & \leq \ 1 \\ & t+w & \leq \ 1 \\ & t,u,v,w,x,y,z \in \{0,1\} & \end{array}\right.$$

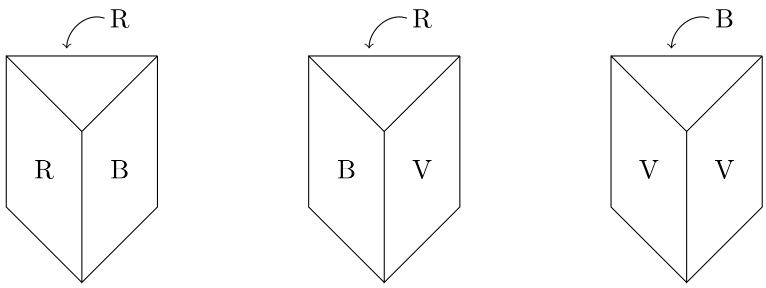
1. Show that this problem is equivalent to the search of a maximum independent set in some graph G. Which one ?
2. Find an optimal solution of P.

▶ **Correction**

1. On obtient un graphe avec un nœud par variable (ici 7). On relie deux nœuds si les variables associées sont dans la même contrainte. Mettre une variable à 1 revient à la mettre dans le stable.
2. u, z, v, w à 1 donc optimale = 4.

Exercise 5 — *Stacking*

Let C_1, C_2, C_3 be the three following cylinders (with a triangular base). They are colored on each of their vertical faces (not on the bases). The color of the back face is indicated at the top of each cylinder.



We search for a way to stack every cylinder (they should remain parallel), such that in each column of the stack, each colors appears at most once. Model this problem using a graph problem and solve it.

▶ **Correction**

On crée un graphe avec 1 nœud par cyclindre et par configuration possible de celui ci. Il y a 6 manières de poser un cylindre (3 à l'endroit et 3 à l'envers), donc 18 nœuds dans le graphe. On relie ensuite 2 nœuds s'ils correspondent au même cyclindre ou, si les deux manières de poser le cyclindre font qu'on met deux fois une couleur dans une même colonne. On cherche ensuite un stable de taille 3 (on ne peut pas faire plus car le graphe est partitionné en 3 cliques de taille 6).

Exercise 6 — *Wedding placement*

How to place each guest of a wedding such that two people that do not like each other are not at the same table ? Model this problem using a graph problem.

▶ **Correction**

On crée un graphe avec 1 nœud par invité qu'on relie s'ils ne s'apprécient pas. On cherche ensuite à partitionner le graphe en stables. Chaque table est un stable. Pour améliorer la mesure, on peut ajouter comme contrainte que chaque table doit avoir un minimum et un maximum d'invités.