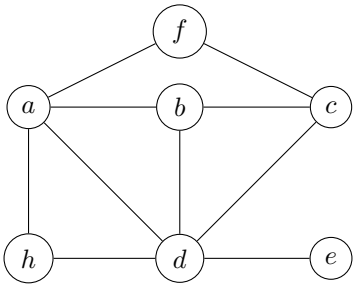
TD 3 : Cliques et Stables

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Quelques définitions*

Soit G le graphe suivant :



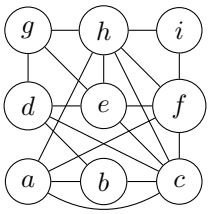
Les poids associés aux sommets sont $p(a) = 3$, $p(b) = 2$, $p(c) = 2$, $p(d) = 4$, $p(e) = 1$, $p(f) = 1$ et $p(h) = 1$.

1. Donnez un stable maximal de G
2. Donnez un stable maximum de G
3. Donnez un stable de poids maximum de G

► **Correction**

1. c, a, e
2. f, b, h, e. Il est maximum car s'il existait un stable de taille 5, il ne contiendrait pas a, b, c, ou d du fait de leur degré et donc il ne resterait que e, f et h.
3. c, a, e de poids 6. De manière similaire à précédemment, a ne peut appartenir à un stable de poids supérieur à 6 car il ne pourrait contenir que a, c et e ; b ne peut appartenir à un stable de poids supérieur à 6 car il ne pourrait contenir que b, f, h et e ; de même pour d. Il ne reste donc que f, c, e, et h comme candidats dont la somme des poids est 6, on ne peut atteindre 7.

Exercice 2 — *Clique et stable*



1. Déterminez, dans G, une clique maximale, une clique maximum et une partition de G en 3 cliques
2. Montrer que trouver une clique dans un graphe est équivalent à trouver un stable dans un autre graphe que l'on déterminera. Donnez un exemple avec G.

▶ **Correction**

1. g, d, e ; h, i, f et a, b, c
2. on prend le graphe complémentaire

Exercice 3 — *Stable et degré*

Soit G un graphe tel que $1 \leq d(x_1) \leq \ldots \leq d(x_n)$ et il existe p dans $[\![2; n]\!]$ tel que $\sum_{i=0}^{p-2} d(x_{n-i}) \leq n - p$. Montrer que tout stable maximal possède au moins p éléments.

▶ **Correction**

Supposons qu'il existe un stable maximal S avec au plus $p-1$ nœuds.

Soient $(v_1, v_2, \ldots, v_{p-1})$ les nœuds de S. On suppose, sans perte de généralité, que $d(v_i) \leq d(v_j)$ pour tout $i < j$. Alors, pour tout $j \in [\![0; p-2$
$rrbracket$, $d(v_{p-1-j} \leq d(x_{n-j}$. Donc, par hypothèse,

$$\sum_{i=0}^{p-2} d(v_{p-1-i}) \leq n - p$$

or S est un stable maximal, donc chacun des autre nœuds est relié à au moins un nœud de S. Il y a au moins $n - (p-1)$ nœuds qui ne sont pas dans S. Donc $\sum_{i=0}^{p-2} d(v_{p-1-i})$ vaut au moins $n - (p-1)$.

Ceci contredit l'inégalité précédente.

Exercice 4 — *Stable maximum sous forme d'équations*

1) Soit P le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} Max \quad t+u+v+w+x+y+z \\ s.c. \\ \qquad\qquad x+y+z \leq 1 \\ \qquad\qquad z+t+u \leq 1 \\ \qquad\qquad x+v \leq 1 \\ \qquad\qquad t+w \leq 1 \\ \qquad t,u,v,w,x,y,z \in \{0,1\} \end{cases}$$

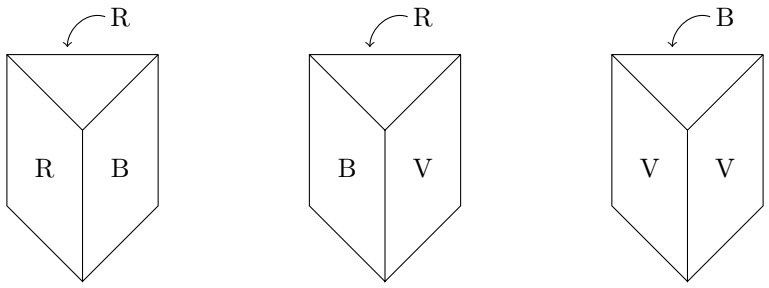
1. Montrer que ce problème est équivalent à la recherche d'un stable de cardinal maximum dans un graphe G que l'on déterminera.
2. Trouver une solution optimale de P.

► **Correction**

1. On obtient un graphe avec un nœud par variable (ici 7). On relie deux nœuds si les variables associées sont dans la même contrainte. Mettre une variable à 1 revient à la mettre dans le stable.
2. u, z, v, w à 1 donc optimale = 4.

Exercice 5 — *Empiler*

Soient C_1, C_2, C_3 les trois cylindres (à base triangulaire) suivants. Ils sont colorés sur les trois faces verticales (pas sur les bases). La couleur de la face arrière est indiquée en haut.



On cherche une façon d'empiler parallèlement les cyclindres de sorte que chaque face de la pile ainsi construite possède au plus une fois chaque couleur. Modéliser ce problème par un problème de graphe et le résoudre.

► **Correction**

On crée un graphe avec 1 nœud par cyclindre et par configuration possible de celui ci. Il y a 6 manières de poser un cylindre (3 à l'endroit et 3 à l'envers), donc 18 nœuds dans le graphe. On relie ensuite 2 nœuds s'ils correspondent au même cyclindre ou, si les deux manières de poser le cyclindre font qu'on met deux fois une couleur dans une même colonne. On cherche ensuite un stable de taille 3 (on ne peut pas faire plus car le graphe est partitionné en 3 cliques de taille 6).

Exercice 6 — *Plan de mariage*

Comment effectuer à un mariage un plan de table de sorte que deux personnes qui ne s'apprécient pas ne soient pas à la même table ? Modéliser ce problème par un problème de graphe.

► **Correction**

On crée un graphe avec 1 nœud par invité qu'on relie s'ils ne s'apprécient pas. On cherche ensuite à partitionner le graphe en stables. Chaque table est un stable. Pour améliorer la mesure, on peut ajouter comme contrainte que chaque table doit avoir un minimum et un maximum d'invités.