Tutorial 4 : Degrees

Graph theory, 1st semester.

2022

Exercise 1 — *Property of the degree*

Let $G = (V, E)$ be an undirected graph with $n = |V|$ et $m = |E|$.

1. Show that there exists two nodes with the same degree.
2. Show that $\sum\limits_{x \in V} deg(x) = 2m$.
3. Show that the number of odd degree nodes is even.
4. Is that true if the graph is directed ?
5. Is that true if the graph is infinite ?
6. How many edges contains a graph where each node has a degree d ?

► **Correction**

1. Dans le cas contraire, chaque nœud a un degré différent. Donc un nœud a un degré nul et un autre a un degré $n-1$, ce qui est impossible.
2. Deux méthodes : sur le dessin, remarquer que chaque arrête compte dans exactement 2 degrés, celui de ses deux extrémités. (on peut dessiner deux flèches sur chaque arête partant de ses deux extrémités). Sinon on prend la matrice d'incidence (nœud vs arête). La somme de chaque colonne fait 2, il y a m colonne. La somme de chaque ligne fait le degré du nœud correspondant. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, la somme des degrés est paire. Donc la somme des degré pairs et des degrés impairs est paire, donc la somme des degrés impairs est paire.
4. Si on considère le degré sortant uniquement, c'est faut, par exemple un circuit de taille 3. Si on considère la somme des degrés entrant et sortant évidemment, ça reste vrai.
5. Si le graphe est infini c'est faux. Par exemple, si on considère un chemin semi-infini (fini sur la gauche et infini sur la droite), il possède un nœud de degré 1.
6. D'après la question 2, $2m = n * d$. On peut en déduire par exemple qu'il n'existe pas de tel graphe avec n et d impairs (mais la question 3 nous le prouve aussi).

Exercise 2 — *My life sucks (on average)* On veut montrer que, dans un réseau social, la plupart des gens ont l'impression d'avoir moins d'amis que leurs amis. On représente le réseau par un graphe non orienté avec n nœuds (les gens) et m arêtes (les liens d'amitiés).

1. Montrer que la moyenne du nombre d'amis d'une personne est $\frac{2m}{n}$
2. On considère la liste contenant, pour chaque personne, pour chaque ami de cette personne, le nombre d'amis de cet ami. Montrer que la moyenne de cette liste, *i.e.* la moyenne du nombre d'amis d'un ami, est $\frac{\sum_{v \in V} deg(v)^2}{2m}$.
3. En déduire qu'une personne moyenne a l'impression d'avoir moins d'ami que ses amis

▶ **Correction**

On note $G = (V, E)$ le graphe.

1. Le degré moyen dans un graphe est $\frac{\sum\limits_{v \in V} deg(v)}{n} = \frac{2m}{n}$
2. L'ensemble des amis est une liste avec doublons : $F = [v \in V | \; \exists u \in V tq (u, v) \in E]$. Un amis est en fait un nœud v voisin d'un autre nœud u, donc en toute rigueur, on devrait lister les couples $(v, (u, v))$ plutôt que les nœuds v eux-mêmes : $F = \{(v, (u, v)), (u, v \in E)\}$

   On cherche donc $\frac{\sum\limits_{(v,e) \in F} deg(v)}{|F|}$.

   La taille de $|F|$ est $2m$, chaque arête apparaît dans 2 couples : $(v, (u, v))$ et $(u, (v, u))$. Un nœud v va apparaître exactement $deg(v)$ fois dans F, une fois par arête incidente à v. Donc $\sum\limits_{(v,e) \in F} deg(v) = \sum\limits_{v \in V} \sum\limits_{(u,v) \in E} deg(v) = \sum\limits_{v \in V} deg(v)^2$. D'où le résultat attendu.

3. On se base sur l'inégalité de Cauchy Swartz : $| \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i y_i)| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

   On pose $x_v = deg(v)$ et $y_v = 1$:

$$| \sum_{v \in V}^{n} (deg(v))| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} deg(v)^2} \sqrt{n}$$

$$2m \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} deg(v)^2} \sqrt{n}$$

   Donc, on a

$$\frac{\sum\limits_{v \in V} deg(v)^2}{2m} \geq \frac{4m^2}{2m * n} = \frac{2m}{n}$$

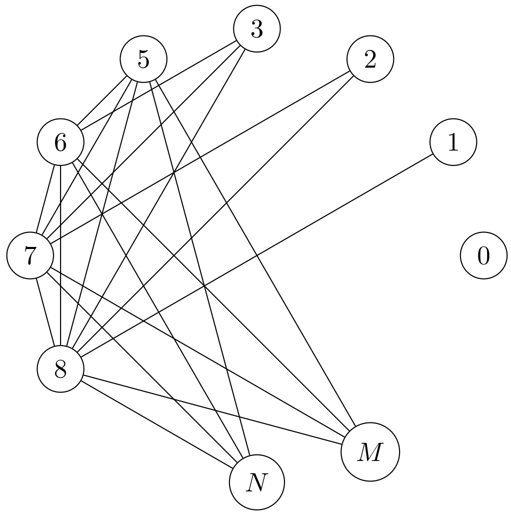
Exercise 3 — *Hand shakes*

The couple Mrs M and Mr N invite 4 couples. Some people salute each other, some do not. Particularly, the two people of a same couple do not salute each other. Mr N asked everyone how many people they saluted. It appears that each person gave a different answer.

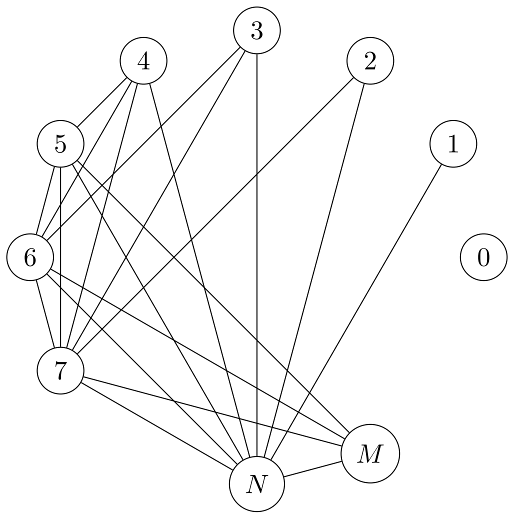
1. Show that
   — the two members of each couple saluted 8 people together.
   — Mrs M and Mr N saluted the same number of people.
2. Is this always true if Mrs M and Mr N are not a couple ?

▶ **Correction**

1. Il y a 10 personnes. Les 8 invités et monsieur M ont salués un nombre de personnes différentes mais ne se sont pas salués eux même ni leur conjoint : donc ils ont salués entre 0 et 8 personnes. Donc une personne a salué 8 personnes. La seule personne qui peut être son conjoint a donc salué 0 personnes. On peut donc déduire que la personne qui a salué 7 personnes n'a pas salué la personne qui en a salué 1 et est donc son conjoint... Les invités sont donc en couple ainsi : (0 - 8) – (1 - 7) – (2 - 6) – (3 - 5). Donc monsieur M et madame N ont serrés 4 mains chacuns.



2. Si madame N est une invitées aussi alors il existe deux personnes qui ne sont pas en couple. Monieur M peut donc avoir serré 4 mains dont madame N, N 8 et tous les autres entre 0 et 7.



Exercise 4 — *Simple graphs*

What is the degree of the nodes

— in a clique of size K ?

— in a cycle of size C ?

— in a tree ?

— in a path ?

— in a grid ?

▶ **Correction**

1. $K - 1$
2. 2
3. quelconque, sauf si l'arbre est régulier. Petit détail : certains nœuds ont un degré 1.
4. 1 ou 2
5. 2, 3 ou 4

Exercise 5 — *Dense graph and path*

Let G be a graph where the degree of each node is at least d. Show that there exists a chain with $d+1$ nodes in G.

▶ **Correction**

Soit une chaine avec moins de $d+1$ nœuds. Soit v une extrémité, ce nœud est de degré d, donc il est relié à au moins un nœud qui n'est pas dans le chemin ? Donc il existe un chemin plus grand. On peut finir la démonstration par construction ou par l'absurde.

Exercise 6 — *Highway access*

In a region containing $2p+1$ cities, each city is linked to p other cities by a highway. Show that it is not possible to go from the capital city to any other city using highways.

▶ **Correction**

Soit le chef lieu v_0, il est relié à p villes $v_1, v_2 \ldots v_p$. Les autres villes, $v_{p+1}, v_{p+2}, \ldots, v_{2p}$, sont reliées également à p nœuds. Donc une telle ville est reliés à au moins une ville parmi $v_0, v_1, \ldots, v_p$. Donc le graphe est connexe.