TD 4 : Degrés

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Propriété des degrés*

Soit un graphe $G = (V, E)$ non orienté avec $n = |V|$ et $m = |E|$.

1. Montrer qu'il existe deux nœuds qui ont le même degré.
2. Montrer que $\sum\limits_{x \in V} deg(x) = 2m$.
3. Montrer que le nombre de nœuds de degré impair est pair.
4. Cela reste-il vrai pour les graphes orientés ?
5. Cela reste-il vrai pour les graphes infinis ?
6. Combien d'arêtes possède un graphe dont tous les nœuds sont de degré d ?

▶ Correction

1. Dans le cas contraire, chaque nœud a un degré différent. Donc un nœud a un degré nul et un autre a un degré $n-1$, ce qui est impossible.
2. Deux méthodes : sur le dessin, remarquer que chaque arrête compte dans exactement 2 degrés, celui de ses deux extrémités. (on peut dessiner deux flèches sur chaque arête partant de ses deux extrémités). Sinon on prend la matrice d'incidence (nœud vs arête). La somme de chaque colonne fait 2, il y a m colonne. La somme de chaque ligne fait le degré du nœud correspondant. D'où le résultat.
3. D'après la question précédente, la somme des degrés est paire. Donc la somme des degré pairs et des degrés impairs est paire, donc la somme des degrés impairs est paire.
4. Si on considère le degré sortant uniquement, c'est faut, par exemple un circuit de taille 3. Si on considère la somme des degrés entrant et sortant évidemment, ça reste vrai.
5. Si le graphe est infini c'est faux. Par exemple, si on considère un chemin semi-infini (fini sur la gauche et infini sur la droite), il possède un nœud de degré 1.
6. D'après la question 2, $2m = n * d$. On peut en déduire par exemple qu'il n'existe pas de tel graphe avec n et d impairs (mais la question 3 nous le prouve aussi).

Exercice 2 — *Ma vie sociale est nulle (en moyenne)* On veut montrer que, dans un réseau social, la plupart des gens ont l'impression d'avoir moins d'amis que leurs amis. On représente le réseau par un graphe non orienté avec n nœuds (les gens) et m arêtes (les liens d'amitiés).

1. Montrer que la moyenne du nombre d'amis d'une personne est $\frac{2m}{n}$
2. On considère la liste contenant, pour chaque personne, pour chaque ami de cette personne, le nombre d'amis de cet ami. Montrer que la moyenne de cette liste, *i.e.* la moyenne du nombre d'amis d'un ami, est $\frac{\sum_{v \in V} deg(v)^2}{2m}$.
3. En déduire qu'une personne moyenne a l'impression d'avoir moins d'ami que ses amis

▶ **Correction**

On note $G = (V, E)$ le graphe.

1. Le degré moyen dans un graphe est $\frac{\sum\limits_{v \in V} deg(v)}{n} = \frac{2m}{n}$
2. L'ensemble des amis est une liste avec doublons : $F = [v \in V | \exists u \in V tq(u, v) \in E]$. Un amis est en fait un nœud v voisin d'un autre nœud u, donc en toute rigueur, on devrait lister les couples $(v, (u, v))$ plutôt que les nœuds v eux-mêmes : $F = \{(v, (u, v)), (u, v \in E)\}$

   On cherche donc $\frac{\sum\limits_{(v,e) \in F} deg(v)}{|F|}$.

   La taille de $|F|$ est $2m$, chaque arête apparaît dans 2 couples : $(v, (u, v))$ et $(u, (v, u))$. Un nœud v va apparaître exactement $deg(v)$ fois dans F, une fois par arête incidente à v. Donc $\sum\limits_{(v,e) \in F} deg(v) = \sum\limits_{v \in V} \sum\limits_{(u,v) \in E} deg(v) = \sum\limits_{v \in V} deg(v)^2$. D'où le résultat attendu.

3. On se base sur l'inégalité de Cauchy Swartz : $|\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i y_i)| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}$.

   On pose $x_v = deg(v)$ et $y_v = 1$:

$$|\sum_{v \in V}^{n}(deg(v))| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} deg(v)^2} \sqrt{n}$$

$$2m \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} deg(v)^2} \sqrt{n}$$

   Donc, on a

$$\frac{\sum\limits_{v \in V} deg(v)^2}{2m} \geq \frac{4m^2}{2m * n} = \frac{2m}{n}$$

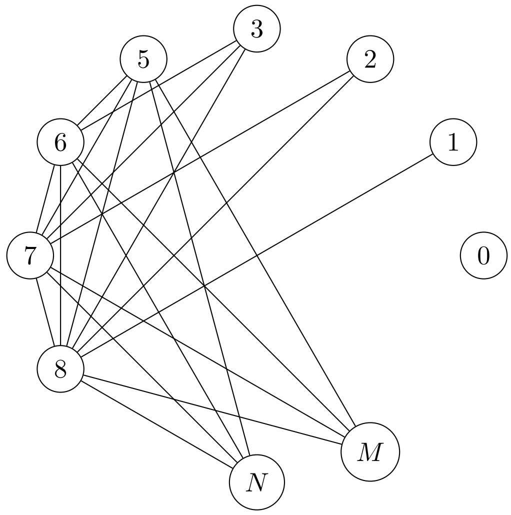
Exercice 3 — *Petite poignée de main*

Le couple Madame M et monsieur N invitent 4 couples chez eux. En arrivant, certains se saluent, d'autres non, en particulier les membres d'un couple ne se saluent pas. Monsieur N a demandé à tout le monde combien de personnes ils avaient salué et chaque personne a donné une réponse différente.

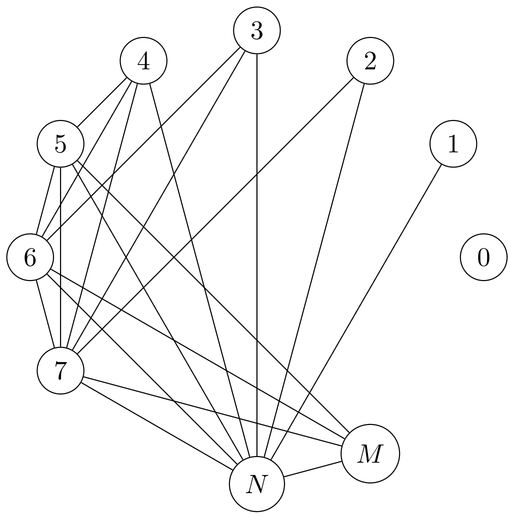
1. Montrer alors que
   — pour chaque couple, les deux personnes du couple ont serré ensemble 8 mains ;
   — Madame M et Monsieur N ont salué les mêmes personnes.
2. Cela est-t-il toujours vrai si madame M n'est pas en couple avec monsieur N ?

▶ **Correction**

1. Il y a 10 personnes. Les 8 invités et monsieur M ont salués un nombre de personnes différentes mais ne se sont pas salués eux même ni leur conjoint : donc ils ont salués entre 0 et 8 personnes. Donc une personne a salué 8 personnes. La seule personne qui peut être son conjoint a donc salué 0 personnes. On peut donc déduire que la personne qui a salué 7 personnes n'a pas salué la personne qui en a salué 1 et est donc son conjoint... Les invités sont donc en couple ainsi : (0 - 8) – (1 - 7) – (2 - 6) – (3 - 5). Donc monsieur M et madame N ont serrés 4 mains chacuns.



2. Si madame N est une invitées aussi alors il existe deux personnes qui ne sont pas en couple. Monieur M peut donc avoir serré 4 mains dont madame N, N 8 et tous les autres entre 0 et 7.



Exercice 4 — *Quelques graphes simples*

Decrivez le degré des nœuds

— dans une clique de taille K ?

— dans un cycle de taille C ?

— dans un arbre ?

— dans un chemin ?

— dans une grille ?

▶ **Correction**

1. $K - 1$
2. 2
3. quelconque, sauf si l'arbre est régulier. Petit détail : certains nœuds ont un degré 1.
4. 1 ou 2
5. 2, 3 ou 4

Exercice 5 — *Graphe dense et chemin*

Soit G un graphe où chaque nœud a au moins un degré d. Montrer qu'il existe une chaîne avec $d+1$ nœuds dans G.

▶ **Correction**

Soit une chaine avec moins de $d+1$ nœuds. Soit v une extrémité, ce nœud est de degré d, donc il est relié à au moins un nœud qui n'est pas dans le chemin ? Donc il existe un chemin plus grand. On peut finir la démonstration par construction ou par l'absurde.

Exercice 6 — *Accès par autoroutes*

Dans un département comptant $2p+1$ villes, chaque ville est reliée à p autres villes par une autoroute. Montrer qu'il est possible de se rendre depuis le chef-lieu du département dans toutes les autres villes en empruntant que des autoroutes.

▶ **Correction**

Soit le chef lieu v_0, il est relié à p villes $v_1, v_2 \dots v_p$. Les autres villes, $v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_{2p}$, sont reliées également à p nœuds. Donc une telle ville est reliés à au moins une ville parmi $v_0, v_1, \dots, v_p$. Donc le graphe est connexe.