

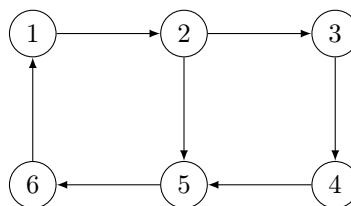
Tutorial 5 : Grundy function, Kernel and Nim game

Graph theory, 1st semester.

2022

Exercise 1 — *Grundy function*

1. What are the possible Grundy functions of the following graph G ?
2. Deduce two kernels of G .

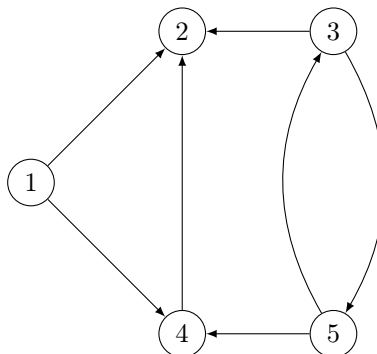


► Correction

1. Soit on met 0 sur 1, 3 et 5; et 1 sur 2, 4 et 6; soit on fait l'inverse. Pour prouver qu'il n'y en a pas d'autre, on peut se rappeler que si le degré sortant d'un nœud est d , alors on ne peut numéroter un nœud que avec $0, 1, 2 \dots$ ou d . Et si on essaie de numéroter le nœud 2 avec 2, ça ne fonctionne pas (ses deux successeurs sont alors numérotés avec 0, ce qui est une contradiction).
2. Les noyaux sont les 0.

Exercise 2 — *Surveillance*

The following graph G corresponds to a set of points that must be observed. An arc (i, j) means that we can observe j from i . How many guard do we have to put on the graph so that every node is observed? Model this problem with a graph problem and solve it.

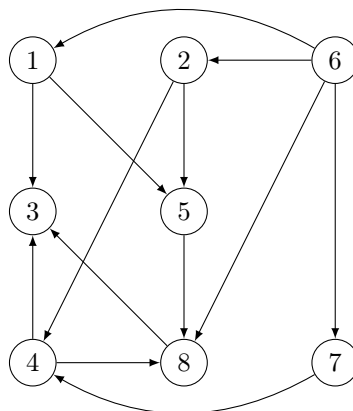


► Correction

On cherche un répulseur de taille minimum, c'est à dire un absorbant dans le graphe où on a inversé toutes les flèches. On peut ensuite donner 3 et 4 comme réponse par exemple qui absorbent respectivement $\{2, 5\}$ et 1.

Exercise 3 — Grundy function in an acyclic graph

Let $G = (V, A)$ the following graph :



1. Show that, in any acyclic digraph there exists an injective function $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ such that $(u, v) \in A \Leftrightarrow f(u) < f(v)$.
2. Deduce that G has a unique Grundy function and a kernel.
3. Compute the Grundy function of G and a kernel of G .

► Correction

1. Il s'agit du tri topologique. Pour le prouver, on peut dire qu'un tel graphe a au moins une source, qu'on numérote avec 1. Puis on la retire. Le graphe obtenu est sans circuit donc a au moins une source, qu'on numérote avec 2 et qu'on retire... Par récurrence, on a tout numéroté et ça respecte la contrainte d'injectivité et de croissance.
2. On prend les nœuds dans l'ordre inverse du tri topologique. On a alors jamais le choix pour numéroté un nœud (car soit c'est un puits qu'on numérote avec 0 soit tous ses successeurs sont numérotés). La fonction de Grundy et le noyau sont donc uniques.

Exercise 4 — Nim games

We consider the following games. For which game the player 1 or 2 has a winning strategy? In each game the first player is player 1.

1. Two players have a board with n sticks. At each turn, a player removes 1, 2 or 3 sticks from the board. The player who removes the last sticks loses the game.
2. Two players share a chocolate bar with n lines and m columns of pieces of chocolate. At each turn, a player eats either any number of lines or any number of columns (at least one). The player who finishes the bar loses the game.
3. Two players have a board with a grid where tokens are placed. Some cells of the grid may be empty. At each turn, a player chooses a token, and remove it from the board with all its (horizontal, vertical and diagonal) neighbors. The player who remove the last token wins the game.

► Correction

Quel que soit le jeu, la méthode à appliquer est la même :

- on trace un graphe où les nœuds sont des états (par exemple, combien reste-t-il de baguettes dans le premier jeu; combien reste-t-il de lignes et de colonnes de chocolats dans le 2e et quels sont les jetons de la grille restant dans le 3e). On peut aussi préciser dans les états qui est le joueur qui joue. C'est plus clair mais c'est superflu et ça double le nombre d'états.
- on relie deux nœuds s'il est possible de passer d'un état à l'autre en un coup de jeu.

- on précise l'état initial
- on précise les états où les joueurs perdent, ce sont des puits du graphe. Si le jeu s'arrête sur un état gagnant s , comme dans le jeu 3, on peut rajouter un état fictif p où l'autre joueur perd et relier s à p pour que les puits soient tous des états perdant.
- on remarque que le graphe est sans circuit
- on invoque l'exo 3 : il existe un unique noyau contenant tous les états perdant.
- on invoque le théorème suivant : pour gagner, un joueur doit, à la fin de son tour, avoir mis le jeu dans un état qui est dans le noyau. Ou, de manière équivalent, si l'état initial est dans le noyau, le joueur 2 a une stratégie gagnante, sinon c'est le joueur 1. En effet, si un joueur peut jouer dans le noyau, par stabilité du noyau, son adversaire doit forcément jouer hors du noyau. Et par absorption, le joueur peut rejouer dans le noyau au tour suivant. Puisque l'état perdant est nécessairement dans le noyau et que le graphe est sans circuit, l'adversaire va forcément finir dans cet état.

L'existence d'une stratégie gagnante pour un joueur dépend généralement de l'entrée. Pour le jeu 1, par exemple, on peut prouver que J1 a une stratégie gagnante ssi n est entre $4p+1$ et $4p+3$. L'idée ici est plutôt de faire un exemple et d'en tracer le graphe.