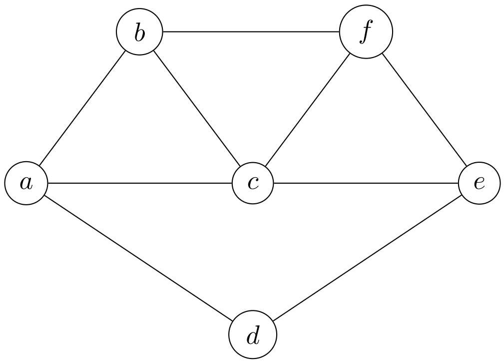
TD 6 : Base de cycles et cocycles

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Rechercher des bases*

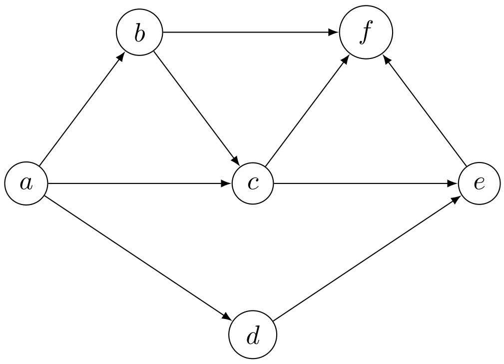


1. (a) Donner les vecteurs associés aux cycles $(bcfb)$ et $(abfeda)$.
   (b) Montrer que le cycle $(bcfb)$ est combinaison linéaire de deux autres cycles que l'on déterminera.
   (c) Combien d'éléments comporte une base de cycles de G ?
   (d) Donner une base de cycles de G qui ne contient ni (b c f b) ni $(abfeda)$.
   (e) Exprimer $(abfeda)$ en fonction de la base calculée à la question précédente.
2. (a) Donner les vecteurs associés aux cocycles (abf) et (ae).
   (b) Montrer que le cocycle (ae) est combinaison linéaire de deux autres cocycles que l'on déterminera.
   (c) Combien d'éléments comporte une base de cocycles de G ?
   (d) Donner une base de cocycles de G qui ne contient aucun cocycle réduit à un nœud.
   (e) Exprimer (abf) en fonction de la base calculée à la question précédente.

▶ **Correction**

Il faut soit commencer par orienter le graphe et travailler avec des matrices de $\{0, 1, -1\}$, soit travailler dans le graphe non orienté avec $\{0, 1\}$ et $1 + 1 = 0$.

Ici on oriente



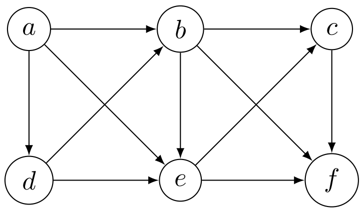
Les arcs sont ordonnés dans l'ordre alphabétique : $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, f), (c, e), (c, f), (d, e), (e, f)$

1. (a) $\mu(bcfb) = (0, 0, 0, 1, -1, 0, 1, 0, 0)$; $\mu(abfefa) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, 0, -1, -1)$
   (b) $\mu(bcfb) = \mu(bcefb) + \mu(acfba)$
   (c) $m - n + p = 4$ (m nb arcs, n nb nœuds, p nb comp connexes)
   (d) $B = \{(abca), (cfec), (acefba), (adeca)\}$
   (e) $\mu(abfeda) = -\mu(acefba) - \mu(adeca)$
2. (a) $\nu(abf) = (0, 1, 1, 1, 0, 0, -1, 0, -1)$; $\nu(ae) = (1, 1, 1, 0, 0, -1, 0, -1, 1)$
   (b) $\nu(ae) = \nu(a) + \nu(e) = \nu(a) - \nu(abcdf) = -\nu(bcdef) - \nu(abcdf)$
   (c) $n - p = 5$ (m nb arcs, n nb nœuds, p nb comp connexes)
   (d) $B' = \{(abc), (bcf), (cfe), (aced), (abfed)\}$

Ce n'est pas tout le temps vrai, mais si on choisi bien ses vecteurs, on peut vérifier qu'une famille est libre simplement avec la méthode itérative suivante : on écrit la matrice des vecteurs en lignes (chaque colonne est une arête). On cherche une arête qui n'apparait que dans un seul vecteur. On supprime ce vecteur, il ne peut être combinaison linéaire des autres. On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un vecteur.

Exercice 2 — *Orthogonalité des cycles et des cocycles*

1. Dans le graphe G suivant, donner les vecteurs de cycle $\mu(abcfeda)$ et $\mu(bdefb)$ et les vecteurs de cocycle $\nu(ac)$ et $\nu(bdef)$. Vérifiez que les deux premiers vecteurs sont chacun orthogonaux aux deux derniers.



2. Soit v un nœud d'un graphe $G = (V, E)$ et c un cycle ne contenant pas v. Montrer que $\nu(v) \perp \mu(c)$.
3. Soit v un nœud d'un graphe $G = (V, E)$ et c un cycle contenant v. Montrer que $\nu(v) \perp \mu(c)$.
4. Soit un graphe $G = (V, E)$ avec p composantes connexes et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ des nœuds de G, un par composante. Montrer que $B = (\nu(u), u \in V \backslash \{v_1, v_2, \ldots, v_p\})$ est une base de cocycles de G.
5. En déduire que, dans un graphe G, tous les cocycles de G sont orthogonaux à tous les cycles de G.

▶ **Correction**

(a) On ordonne ici aussi les arcs par ordre alphabétique : $(a, b), (a, d), (a, e), (b, c), (b, e), (b, f), (c, f), (d, b), (d, e),$ (

— $\mu(abcfeda) = (1, -1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, -1)$
— $\mu(bdefb) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 1, 0, 1)$
— $\nu(ac) = (1, 1, 1, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0)$
— $\nu(bdef) = (-1, -1, -1, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$

On fait les produits scalaires, en remarquand que $\nu(ac) = -\nu(bdef)$
— $\mu(abcfeda) \cdot \nu(ac) = -\mu(abcfeda) \cdot \nu(bdef) = 1 - 1 + 0 - 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$
— $\mu(bdefb) \cdot \nu(ac) = -\mu(bdefb) \cdot \nu(bdef) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

(b) Si c ne contient pas v alors tous les arcs entrant ou sortant de v ne sont pas dans le cycle c. Donc tout coordonnée est non nulle dans $\nu(v)$ ssi elle est nulle dans $mu(c)$. Le produit scalaire est donc nul.

(c) Si c contient v, posons $c = (v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1} = v_1)$. Les seuls coordonnées pouvant intervenir dans le produit scalaire sont celles des arcs entrant et sortant de v. Supposons que $v = v_i$ alors il existe deux arêtes $a = (v_{i-1}, v_i)$ et $b = (v_i, v_{i+1})$. On appelle μ_a, μ_b, ν_a et ν_b les coordonnées des vecteurs $\mu(c)$ et $\nu(v)$ correspondant aux arcs a et b.

4 cas selon l'orientation de a et b :

— a entre en v et b sort de v. Dans ce cas, $\mu_a = 1$, $\mu_b = 1$, $\nu_a = -1$, $\nu_b = 1$.

— a entre en v et b entre en v. Dans ce cas, $\mu_a = 1$, $\mu_b = -1$, $\nu_a = -1$, $\nu_b = -1$

— a sort de v et b sort de v. Dans ce cas, $\mu_a = -1$, $\mu_b = 1$, $\nu_a = 1$, $\nu_b = 1$

— a sort de v et b entre en v. Dans ce cas, $\mu_a = -1$, $\mu_b = -1$, $\nu_a = 1$, $\nu_b = -1$

Dans tous les cas, on vérifie bien que $\mu_a\nu_a + \mu_b\nu_b = 0$.

Le cycle n'est pas forcément élémentaires, mais cette propriété est vraie pour tout i où $v_i = v$.

Pour tous les autres arcs, la coordonnée de $\nu(v)$ est nulle. Donc le produit scalaire est nul.

(d) Procédons par récurrence. Si G possède un nœud, alors son nombre cocyclematique vaut $n-p = 1-1 = 0$. La base possède donc 0 vecteur (il n'y a pas de cocycle dans le graphe), tout comme F, c'est bon. Si la propriété est vraie pour tout graphe ayant n nœuds ou moins, soit G un graphe avec $n+1$ nœuds.

Plusieurs possibilités : si le graphe a au moins 2 composantes connexes, on applique la récurrence sur chaque composante, ce qui nous donne une base de cocycle de chaque composante. Ces familles de vecteurs sont nécessairement linéairement indépendantes les unes par rapport aux autres car aucun composante n'a d'arête en commun.

Il s'agit bien d'une base car, si on nomme C_i les nœuds de la i^{e} composante, alors chaque composante apporte $|C_i| - 1$ vecteurs dans sa base. On obtient donc une famille libre avec $\sum_{i=1}^{p}(|C_i| - 1) = n - p$ vecteurs. C'est donc une base de cocycle de G.

Si le graphe n'a qu'une composante. Alors soit w un voisin de v_1. Nécessairement, dans la famille B, le vecteur $\nu(w)$ est le seul à avoir la coordonnée associée (w, v_1) non nulle. Donc $\nu(w)$ est linéairement indépendant par rapport aux autres vecteurs de B.

Soit G' le graphe où on a retiré v_1. Considérons, dans G', la famille $B' = (\nu(u), u \in V\backslash\{w\})$. Alors, par récurrence, B' est une base de cocycles de G'. Soit B'' la même famille mais dans G, où on a rajouté les coordonnées liées aux arêtes incidentes à v_1, on ne perd par la propriété d'indépendance linéaire, et, puisque $\nu(w)$ est linéairement indépendant avec tous les vecteurs de B'', alors B est une famille libre. Cette famille possède $n - 1$ vecteurs donc c'est une base.

(e) D'après les questions (b) et (c), tous les cocycles de la base B de la question (d) sont orthogonaux à tous les cycles, donc tous les cocycles sont orthogonaux à tous les cycles.