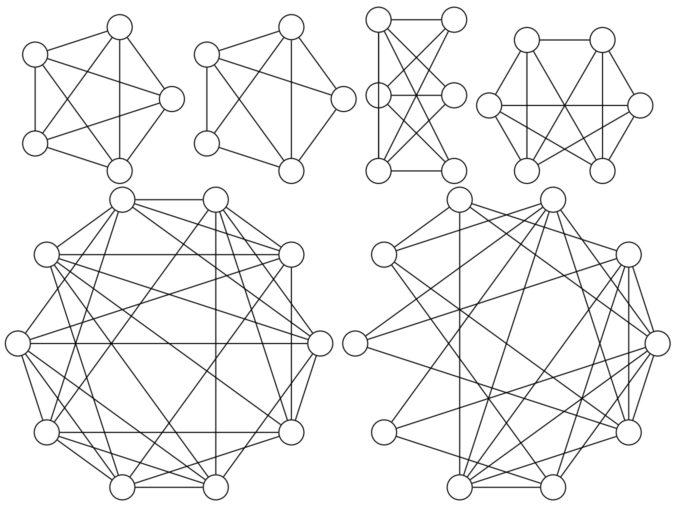
Tutorial 7 : Planar graphs

Graph theory, 1st semester.

2022

Exercise 1 — *Planar graph ?*

Which of the following graphs are plana graphs ? Check the euler formula for each of the planar graphs and explain why the non planar graphs are not planar.



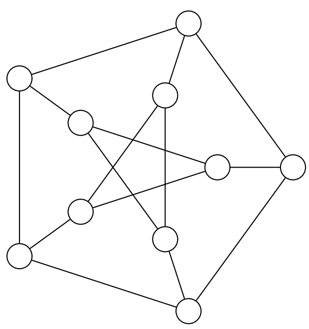
► **Correction**

Dans l'ordre :

1. Non planaire : c'est K_5
2. Planaire
3. Non planaire, il contient K_{33}
4. Planaire
5. Non planaire car tous les nœuds sont de degré supérieur à 5 (ou $m \geq 3n - 5$)
6. Non planaire car $m = 3n - 5$.

Exercise 2 — *Petersen graph*

We want to prove the following graph, named the Petersen graph, is not planar.



1. Show that this graph satisfies $m < 3n - 5$.
2. Show every cycle of this graph has 5 edges or more.
3. Let G be a simple connected planar graph with no cycle with c edges or less than c edges, show that $m < \frac{(c+1)(n-2)}{c-1} + 1$.
4. Deduce that the Petersen graph is not planar.

▶ **Correction**

1. On a $m = 15$ et $n = 10$ donc $3n - 5 = 25$
2. Il n'y a pas de cycle de taille 4 contenant que les 5 nœuds du centre. De même il n'existe pas de cycle de taille 4 contenant que les 5 nœuds extérieurs. Donc il existe deux nœuds, un extérieur, un intérieur, dans le cycle, reliés par une arête. Il n'existe pourant aucun cycle de taille 4 contenant une telle arête (ce qui peut se vérifier facilement par symétrie).

   On peut aussi arguer qu'aucun nœud n'est relié deux fois à un autre nœud par un chemin de taille 2.
3. On peut le dessiner topologiquement planaire. Chaque face est un cycle, donc de taille au moins $c + 1$. Si on additionne toutes les arêtes de chaque face, on tombe sur $2m$ et au moins $(c + 1)f$ donc $2m \geq (c + 1)f$. D'après la formule d'Euler, $n - m + f = 2$ donc $2m \geq (c + 1)(2 + m - n)$ et on en déduit la formule demandée (en oubliant pas de rajouter 1 pour obtenir l'inégalité stricte).
4. On a $m = 15$, $n = 10$ et $c = 4$ donc $5 * 8/3 + 1 = 43/3 \simeq 14.333 < m$.

Exercise 3 — $K_{3,3}$ *is planar on a mug*

Show that it is possible to draw $K_{3,3}$ on a torus.

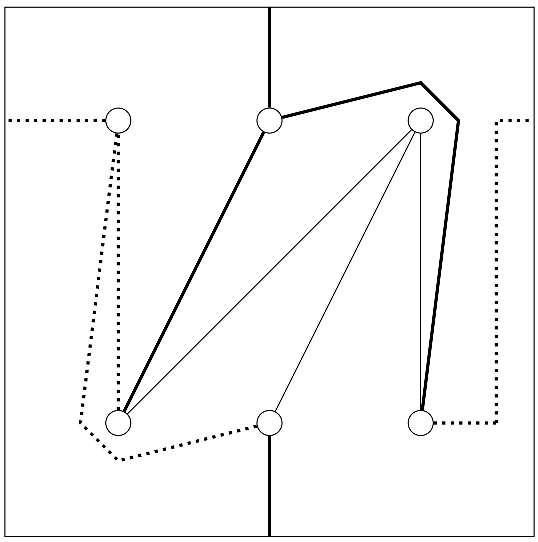
▶ **Correction**

Un tore est équivalent à un rectangle où

— quand on dépasse en haut, on se retrouve en bas ; et inversement

— quand on dépasse à gauche on se retrouve à droite ; et inversement

Si on replie le rectangle sur lui même pour que le haut et le bas se touchent ; puis qu'on le replie pour que la gauche et la droite se touchent on a un tore.



On peut aussi faire le dessin directement sur un tore (mais faut être un peu doué en dessin). Un mug est équivalent à un tore (un peu déformé).

Exercise 4 — *Printed circuit design*

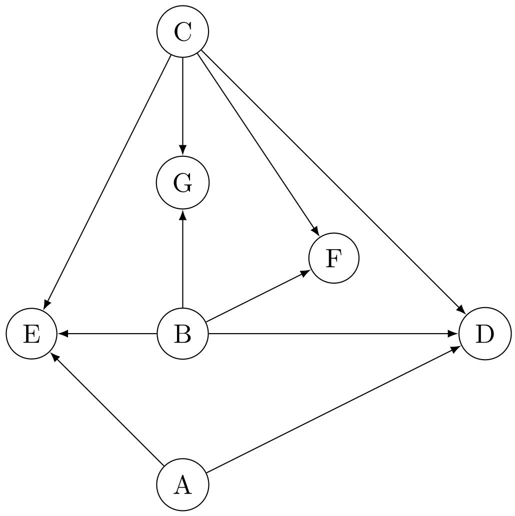
Seven components, (A, B, ..., G) with connection points (from 1 to 4, $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, \ldots,$) must be put on a printed circuit. No two connection point has to be linked and no two connection link can cross each other. We have to connect the following poinst

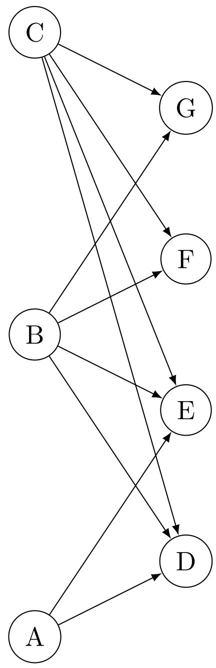
$a_1 - d_1, a_2 - e_1, b_1 - e_2, b_1 - g_2, b_2 - f_1, b_3 - d_2, c_1 - f_2, c_2 - g_1, c_3 - e_3, c_4 - d_3$

1. Show that it is possible to print the circuit.
2. Show that in a bipartite simple connected planar graph, $m < 2n - 3$.
3. Is it possible to add a new connection in the circuit ?

▶ **Correction**

1. On peut dessiner un graphe biparti. Les nœuds sont les $A, B, \ldots, G$ où deux points d'un même composant sont représentés par le même nœud. On met à gauche A, B et C et les autres nœuds à droite. On peut ensuite dessiner ce graphe sous forme planaire, et éventuellement sous forme rectilinéaire (car sur un circuit imprimé les tracés sont horizontaux ou verticaux).





2. Un graphe biparti planaire simple et connexe n'a pas de circuit de taille 3 ou moins. Voir la question 3 de l'exercice 2. C'est la même démonstration dans le cas où $c = 3$.
3. On a $m = 10$ et $n = 7$ donc $m < 11$. On ne peut donc pas rajouter d'arête sans rendre le graphe non planaire.

Exercise 5 — *Planar graph and cycle basis*

Let G be a planar graph. We want to show that the internal faces are a cycle basis, by induction on f, the number of faces. Let $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{f-1}\}$ be the internal faces of G.

1. Let G be a graph with no face. Show that it does not contain any cycle. Deduce that the property is true when $f = 1$.

   ▶ **Correction**

   S'il n'y a pas de face, alors il n'y a pas de cycle, sinon, ce cycle formerait le contours d'une ou plusieurs faces internes. Donc la base de cycles est vide et est donc bien égale à l'ensemble des faces internes.

2. We now assume that the property is true for any graph with f faces.
   (a) Let e be an edge of the cycle surounding F_1. Show that $G \backslash \{e\}$ is planar. Deduce a cycle basis of that graph.

▶ **Correction**

Si on peut dessiner G planaire, alors en retirant e, on ne peut créer de croisement, donc $G\backslash\{e\}$ est planaire.

Il a une face interne de moins (cf formule d'Euler ; ou plus simplement ; on a cassé F_1). Donc par récurrence, les faces de $G\backslash\{e\}$ forment une base B' de cycle de ce graphe.

(b) Show that we can obtain a cycle basis of G by adding F_1 to the basis of $G\backslash\{e\}$.

▶ **Correction**

Le nombre cyclomatique de G est $m-n+p$. Celui de $G\backslash\{e\}$ est $m-1-n+p$. Donc une base de G a un cycle de plus qu'une base de $G\backslash\{e\}$.

Si on ajoute F_1 à B', on a le bon nombre de cycles. La famille de B' est libre (c'est une base de $G\backslash\{e\}$). Et e n'appartient à aucun cycle de B', donc F_1 ne peut être combinaison linéaire des cycles de B', donc $B = B \cup \{F_1\}$ est une base de cycles de G.

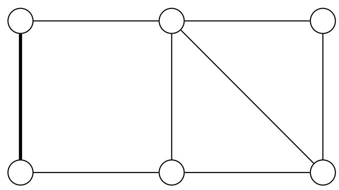
(c) What can we say if all the cycles of the cycle basis of $G\backslash\{e\}$ are internal faces of G ? Show a case where this happens.

▶ **Correction**

Alors la propriété est vérifiée, on a bien une base de cycles constituée des faces internes de G.

Ca survient si e est une arête de F_1 et de la face externe de G.

Par exemple, sur le dessin, si e est l'arête en gras. Les deux faces internes triangles sont des faces internes de $G\backslash\{e\}$.



(d) Otherwise, show that at most one cycle C of that basis is not an internal face of G ?

▶ **Correction**

Une arête d'un cycle entourant une face de G appartient à 2 faces. L'une de ces faces est F_1. Il ne reste donc qu'une autre face possible. Toutes les autres faces sont dans $G\backslash\{e\}$ donc dans B'.

(e) Show that $C \oplus F_1$ is an internal face of G.

▶ **Correction**

On sait que C est une face de $G\backslash\{e\}$ et n'est pas une face de G, donc e fait partie d'une corde de C et les deux côtés de cette corde sont des faces de G. Cette corde appartient au cycle de F_1 donc aussi au cycle d'une autre face interne de G.

$C \oplus F_1$ contient donc la corde et toutes les arêtes de C qui ne sont pas dans F_1, c'est à dire l'autre face de G produite quand on ajoute la corde à C.

(f) Deduce that the internal faces of G are a cycle basis.

▶ **Correction**

Si B est une base de cycles de G alors $(B\backslash C) \cup \{C \oplus F_1\}$ est aussi une base de cycles. Le nombre de cycles est égal au nombre cyclomatique, on ne peut produire $C \oplus F_1$ avec une combinaison linéaire des cycles de $B'\backslash\{C\}$ puisqu'ils ne contiennent pas l'arête e. Si on avait une combinaison des cycles de $B'\backslash\{C\}$ et de F_1 donnant $C \oplus F_1$ alors la même combinaison privée de F_1 donnerait C, ce qui est exclu puisque B' est une base.

Donc $(B\backslash C) \cup \{C \oplus F_1\}$ est une base de G et n'est constituée que de faces internes de G.