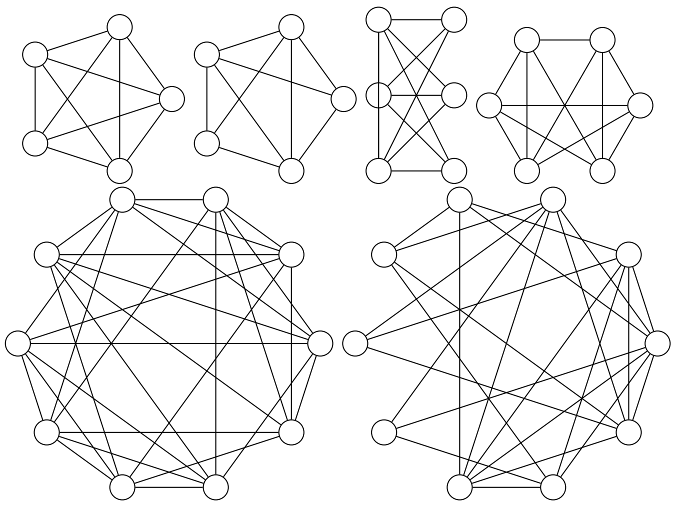
TD 7 : Graphes planaires

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Planaire ?*

Parmi les graphes suivants : lesquels sont planaires ou non ? Si c'est le cas, vérifiez la formule d'Euler. Sinon pourquoi n'est-il pas planaire ?



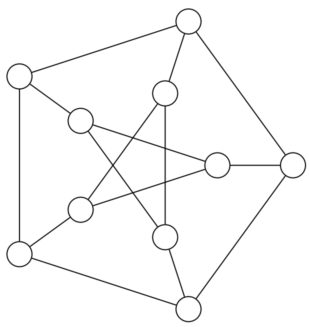
▶ Correction

Dans l'ordre :

1. Non planaire : c'est K_5
2. Planaire
3. Non planaire, il contient K_{33}
4. Planaire
5. Non planaire car tous les nœuds sont de degré supérieur à 5 (ou $m \geq 3n - 5$)
6. Non planaire car $m = 3n - 5$.

Exercice 2 — *Le graphe de Petersen*

On veut montrer que le graphe suivant, nommé graphe de Petersen, n'est pas planaire.



1. Montrez que ce graphe vérifie $m < 3n - 5$
2. Montrez que ce graphe ne contient aucun cycle de taille inférieure ou égale à 4.
3. Soit G un graphe planaire simple et connexe n'ayant pas de cycle de taille inférieure ou égale à c, montrer que $m < \frac{(c+1)(n-2)}{c-1} + 1$.
4. En déduire que le graphe de Petersen n'est pas planaire.

▶ **Correction**

1. On a $m = 15$ et $n = 10$ donc $3n - 5 = 25$
2. Il n'y a pas de cycle de taille 4 contenant que les 5 nœuds du centre. De même il n'existe pas de cycle de taille 4 contenant que les 5 nœuds extérieurs. Donc il existe deux nœuds, un extérieur, un intérieur, dans le cycle, reliés par une arête. Il n'existe pourant aucun cycle de taille 4 contenant une telle arête (ce qui peut se vérifier facilement par symétrie).

   On peut aussi arguer qu'aucun nœud n'est relié deux fois à un autre nœud par un chemin de taille 2.
3. On peut le dessiner topologiquement planaire. Chaque face est un cycle, donc de taille au moins $c + 1$. Si on additionne toutes les arêtes de chaque face, on tombe sur $2m$ et au moins $(c + 1)f$ donc $2m \geq (c + 1)f$. D'après la formule d'Euler, $n - m + f = 2$ donc $2m \geq (c + 1)(2 + m - n)$ et on en déduit la formule demandée (en oubliant pas de rajouter 1 pour obtenir l'inégalité stricte).
4. On a $m = 15$, $n = 10$ et $c = 4$ donc $5 * 8/3 + 1 = 43/3 \simeq 14.333 < m$.

Exercice 3 — *$K_{3,3}$ est planaire sur un mug !*

Montrer qu'il est possible de dessiner $K_{3,3}$ planaire sur un tore.

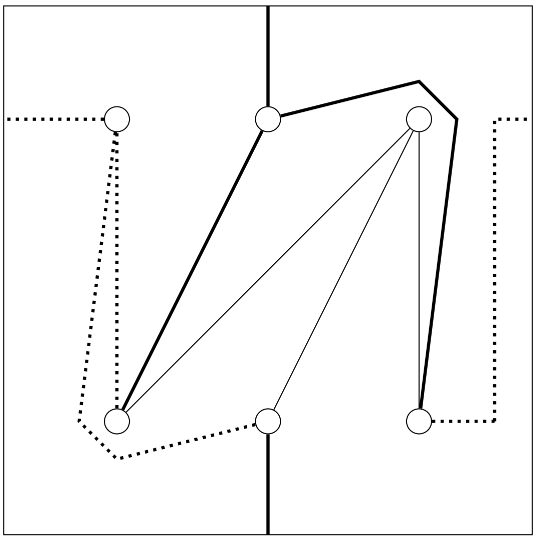
▶ **Correction**

Un tore est équivalent à un rectangle où

— quand on dépasse en haut, on se retrouve en bas ; et inversement

— quand on dépasse à gauche on se retrouve à droite ; et inversement

Si on replie le rectangle sur lui même pour que le haut et le bas se touchent ; puis qu'on le replie pour que la gauche et la droite se touchent on a un tore.



On peut aussi faire le dessin directement sur un tore (mais faut être un peu doué en dessin). Un mug est équivalent à un tore (un peu déformé).

Exercice 4 — *Dessin de circuit imprimé*

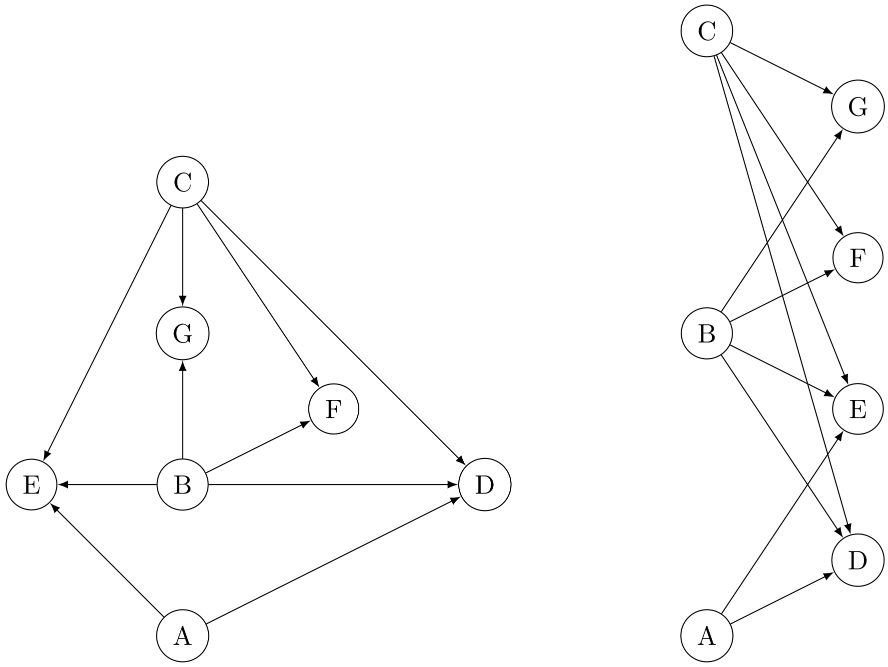
Des composants $(A, B, C, \dots, G)$ ayant un à quatre points de connexions $(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, \dots)$ trop rapprochés pour permettre le passage d'une liaison entre eux, doivent être implantés sur une plaquette de circuit imprimé. Deux connections ne doivent pas se croiser. Les connexions à établir sont : .

$a_1 - d_1, a_2 - e_1, b_1 - e_2, b_1 - g_2, b_2 - f_1, b_3 - d_2, c_1 - f_2, c_2 - g_1, c_3 - e_3, c_4 - d_3$

1. Montrer qu'il est possible de placer ces connexions sur le circuit imprimé.
2. Montrer que dans un graphe biparti planaire simple et connexe, $m < 2n - 3$.
3. Est-il possible d'ajouter une connexion supplémentaire entre les deux parties du graphe sans qu'il y ait une intersection entre deux connexions ?

▶ **Correction**

1. On peut dessiner un graphe biparti. Les nœuds sont les $A, B, \dots, G$ où deux points d'un même composant sont représentés par le même nœud. On met à gauche A, B et C et les autres nœuds à droite. On peut ensuite dessiner ce graphe sous forme planaire, et éventuellement sous forme rectilinéaire (car sur un circuit imprimé les tracés sont horizontaux ou verticaux).



2. Un graphe biparti planaire simple et connexe n'a pas de circuit de taille 3 ou moins. Voir la question 3 de l'exercice 2. C'est la même démonstration dans le cas où $c = 3$.
3. On a $m = 10$ et $n = 7$ donc $m < 11$. On ne peut donc pas rajouter d'arête sans rendre le graphe non planaire.

Exercice 5 — *Base de cycle et graphe planaire*

Soit G un graphe planaire. On veut montrer que ses faces internes forment une base de cycles. On va le montrer par récurrence sur f, le nombre de faces. Soient $F = \{F_1, F_2, \dots, F_{f-1}\}$ les faces internes de G.

1. Supposons que G n'a aucune face interne, montrer qu'il n'a aucun cycle. En déduire que la propriété est vraie quand $f = 1$.

▶ **Correction**

S'il n'y a pas de face, alors il n'y a pas de cycle, sinon, ce cycle formerait le contours d'une ou plusieurs faces internes. Donc la base de cycles est vide et est donc bien égale à l'ensemble des faces internes.

2. Supposons maintenant la propriété vraie pour tout graphe avec f faces.
   (a) Soit e une arête du cycle entourant F_1. Montrer que $G\backslash\{e\}$ est planaire. En déduire une base de cycles.

   ▶ **Correction**

   Si on peut dessiner G planaire, alors en retirant e, on ne peut créer de croisement, donc $G\backslash\{e\}$ est planaire.
   Il a une face interne de moins (cf formule d'Euler ; ou plus simplement ; on a cassé F_1). Donc par récurrence, les faces de $G\backslash\{e\}$ forment une base B' de cycle de ce graphe.

   (b) Montrer que si on ajoute F_1 à cette base de cycles, alors on a une base de cycles de G.

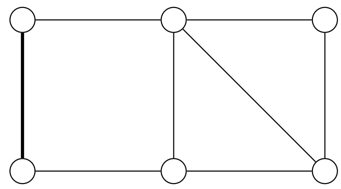
   ▶ **Correction**

   Le nombre cyclomatique de G est $m - n + p$. Celui de $G\backslash\{e\}$ est $m - 1 - n + p$. Donc une base de G a un cycle de plus qu'une base de $G\backslash\{e\}$.
   Si on ajoute F_1 à B', on a le bon nombre de cycles. La famille de B' est libre (c'est une base de $G\backslash\{e\}$). Et e n'appartient à aucun cycle de B', donc F_1 ne peut être combinaison linéaire des cycles de B', donc $B = B \cup \{F_1\}$ est une base de cycles de G.

   (c) Que peut-on dire si tous les cycles de la base de cycles de $G\backslash\{e\}$ sont des faces internes de G ? Présenter un cas où cela survient.

   ▶ **Correction**

   Alors la propriété est vérifiée, on a bien une base de cycles constituée des faces internes de G.
   Ca survient si e est une arête de F_1 et de la face externe de G.
   Par exemple, sur le dessin, si e est l'arête en gras. Les deux faces internes triangles sont des faces internes de $G\backslash\{e\}$.



   (d) Si ce n'est pas le cas, montrer qu'au plus un cycle C de cette base n'est pas une face interne de G.

   ▶ **Correction**

   Une arête d'un cycle entourant une face de G appartient à 2 faces. L'une de ces faces est F_1. Il ne reste donc qu'une autre face possible. Toutes les autres faces sont dans $G\backslash\{e\}$ donc dans B'.

   (e) Montrer que $C \oplus F_1$ est une face interne de G.

   ▶ **Correction**

   On sait que C est une face de $G\backslash\{e\}$ et n'est pas une face de G, donc e fait partie d'une corde de C et les deux côtés de cette corde sont des faces de G. Cette corde appartient au cycle de F_1 donc aussi au cycle d'une autre face interne de G.
   $C \oplus F_1$ contient donc la corde et toutes les arêtes de C qui ne sont pas dans F_1, c'est à dire l'autre face de G produite quand on ajoute la corde à C.

   (f) En déduire que les faces internes de G forment une base de cycles.

► **Correction**

Si B est une base de cycles de G alors $(B\backslash C) \cup \{C \oplus F_1\}$ est aussi une base de cycles. Le nombre de cycles est égal au nombre cyclomatique, on ne peut produire $C \oplus F_1$ avec une combinaison linéaire des cycles de $B'\backslash\{C\}$ puisqu'ils ne contiennent pas l'arête e. Si on avait une combinaison des cycles de $B'\backslash\{C\}$ et de F_1 donnant $C \oplus F_1$ alors la même combinaison privée de F_1 donnerait C, ce qui est exclu puisque B' est une base.

Donc $(B\backslash C) \cup \{C \oplus F_1\}$ est une base de G et n'est constituée que de faces internes de G.