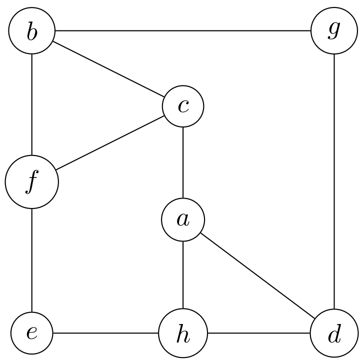
TD 9 : Arbres couvrants

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Arbre couvrant et base de cycle*

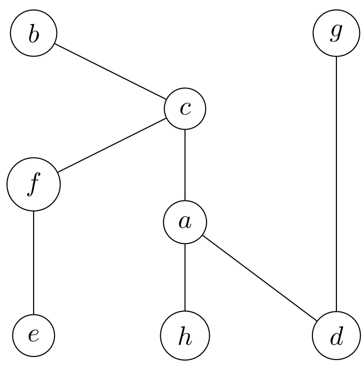
Soit G le graphe suivant :



1. Donner un arbre couvrant T de G tel que la base de cycle associée corresponde à l'ensemble des faces finies de G.

▶ **Correction**

— L'arbre suivant convient :



Exercice 2 — *Conception d'un réseau de transmission de données*

Une banque désire installer au moindre coût un réseau de transmissions de données entre son agence centrale située dans le quartier de la Bourse à Paris et sept de ses succursaltes. Le coût de construction d'une ligne entre deux agences est donné par le tableau suivant :

	B	O	E	R	SL	L	N
Bourse							
Opera	5						
Etoile	18	17					
République	9	11	27				
St-Lazare	13	7	23	20			
Louvre	7	12	15	15	15		
Neuilly	38	38	20	40	40	35	
Chatelet	22	15	25	25	30	10	45

Modélisez ce problème par un problème de graphe et résolvez le.

► **Correction**

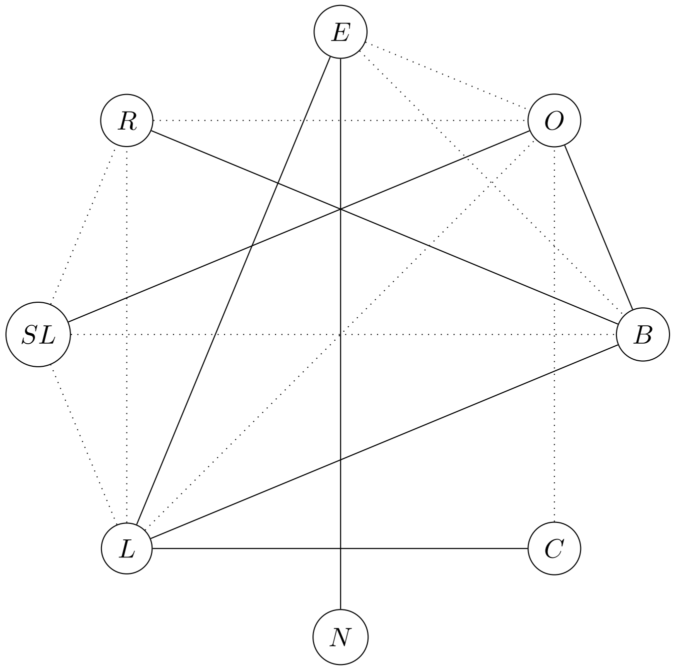
Il peut se modéliser avec un problème d'arbre couvrant de poids minimum. En utilisant l'algorithme de Kruskal (ou de Prim), on peut le résoudre.

Kruskal :

On trie les arêtes par poids :

— $(O, B), 5$
— $(SL, O), 7$
— $(L, B), 7$
— $(R, B), 9$
— $(C, L), 10$
— $(R, O), 11$
— $(L, O), 12$
— $(SL, B), 13$
— $(L, E), 15$
— $(L, R), 15$
— $(L, SL), 15$
— $(C, O), 15$
— $(E, O), 17$
— $(E, B), 18$
— $(Sl, R), 20$
— $(N, E), 20$
— $(C, B), 22$
— $(SL, E), 23$
— $(C, E), 25$
— $(C, R), 25$
— $(R, E), 27$
— $(C, SL), 30$
— $(N, L), 35$
— $(N, B), 38$
— $(N, O), 38$
— $(N, R), 40$
— $(N, SL), 40$
— $(C, N), 45$

On ajoute les arêtes une par une tant qu'elles ne produisent pas de cycle.



Exercice 3 — *Quelques propriétés des arbres*

1. Montrer que tout arbre avec 2 sommets admet au moins deux sommets pendants (i.e. de degré 1).

▶ **Correction**

Soit G un graphe connexe avec 0 sommet de degré 1. Alors ils sont tous de degré au moins 2. Si G a exactement 1 sommet de degré 1, alors tous les autres sont de degré au moins 2, et un des autres nœuds est de degré 3 (sinon le nombre de nœuds de degré impair serait impair). La somme des degrés vaut alors au moins $2n$, donc le nombre d'arêtes vaut au moins n ce qui exclu le cas où G est un arbre.

2. Démontrer que tout graphe connexe d'au moins deux sommets admet au moins deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.

▶ **Correction**

Supposons que tous les nœuds d'un graphe G soient des points d'articulation : si on retire un de ces sommets alors le graphe se déconnecte. Aucun sommet n'appartient à un cycle, donc le graphe est un arbre. Or dans un arbre, retirer les feuilles ne déconnecte pas le graphe, donc tous les nœuds ne sont pas des points d'articulation. L'idée est similaire pour le cas où un seul nœud n'est pas point d'articulation.

3. Donner un graphe qui n'a que deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.

▶ **Correction**

Le chemin P_3 est un exemple simple.

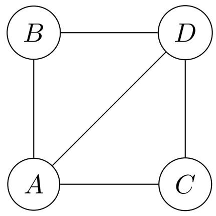
Exercice 4 — *Connexité du graphe des arbres couvrant*

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres couvrant de G. Soit $H = (\mathcal{T}, E_H)$ le graphe où

— les nœuds sont des arbres couvrants de G

— une arête relie deux nœuds de H correspondant aux arbres couvrant T_1 et T_2 de G si et seulement si toutes les arêtes de T_1 et T_2 sauf une sont identiques.

1. Dessinez H quand G est le graphe suivant :



▶ **Correction**

Le graphe H possède 8 nœuds :

— les chemins A, B, D, C ; B, D, C, A ; D, C, A, B ; C, A, B, D ; B, D, A, C et B, A, D, C

— Les deux étoiles enracinées en A et D.

On relie deux nœuds si les arbres correspondent à des arbres avec 2 arêtes en commun. Par exemple A, B, D, C et B, D, C, A mais pas A, B, D, C et B, D, A, C.

2. Montrer que H est connexe.

▶ **Correction**

On démontre que deux arbres T_1 et T_2 couvrant sont toujours reliés par un chemin dans H. On le fait par récurrence sur le nombre d'arêtes en commun. Deux arbres avec les mêmes arêtes sont reliés puisque c'est le même nœud de H. On suppose que c'est vrai s'ils ont k arêtes en commun. S'ils ont $k - 1$ arêtes en commun, il faut montrer qu'on peut enlever une arête de T_1 et ajouter une arête de T_2 pour qu'ils aient k arêtes en commun et utiliser l'hypothèse de récurrence.

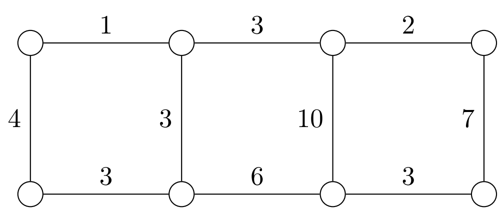
Exercice 5 — *Algorithme de Prim*

L'algorithme de Prim trouvant un arbre couvrant de poids minimum est le suivant :

Entrées: Un graphe $G = (V, E)$ non orienté connexe et des poids $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$
Sorties: Un arbre couvrant de poids minimum de G
  $T = (V_T, E_T) = (\emptyset, \emptyset)$
  Ajouter un nœud v quelconque à V_T
  Tant que $|V_T| \neq |V|$ **Faire**
    Ajouter à E_T une arête de poids minimum reliant un nœud u de V_T et un nœud v de $V \setminus V_T$.
    Ajouter v à V_T
  Renvoyer T

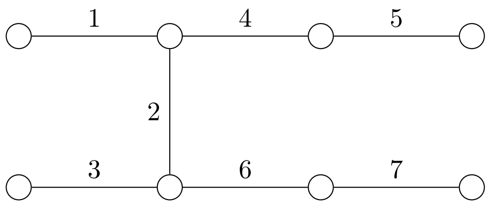
---

1. Appliquez l'algorithme sur le graphe suivant :



▶ **Correction**

On part arbitrairement du nœud en haut à gauche. On ajoute alors les arêtes suivantes, les numéros sont l'ordre dans lequel on les ajoute.



2. Soit T_i l'arbre T au début de l'itération i et e l'arête choisie pendant l'itération i. Soit $\mathcal{T}_i$ l'ensemble des arbres couvrant de G contenant T_i. Montrer qu'il existe un arbre de $\mathcal{T}_i$, de poids minimum et contenant e.

► Correction

Supposons que tout arbre de poids minimum de $\mathcal{T}_i$ ne contienne pas e. Soit T^* un tel arbre. Soit $f_1, f_2, \ldots, f_p$ les arêtes de T^* sortant de T_i. Or e étant une arête de poids minimum sortant de T_i, on a $\omega(e) \leq \omega(f_j)$. Si on ajoute e à T_i, on forme un cycle, ce cycle passe nécessairement par une arête f_j car e connecte un nœud de T_i et un nœud hors de T_i, ce cycle doit donc posséder une autre arête reliant un nœud de T_i et un nœud hors de T_i. Si on supprime f_j, on obtient un arbre de poids plus petit ou égal ce qui contredit l'hypothèse.

3. En déduire que l'algorithme de Prim renvoie un arbre couvrant de poids minimum.

► Correction

Montrer par récurrence sur i que le sous-arbre construit à l'issue de l'itération i est un sous-arbre d'une solution optimale.