

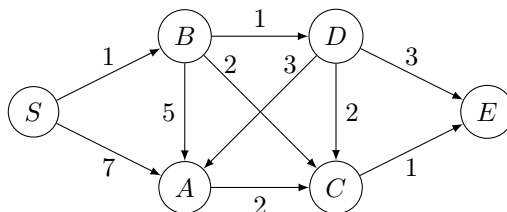
TD 10 : Plus courts chemins, diamètre

Théorie des graphes S1.

2022

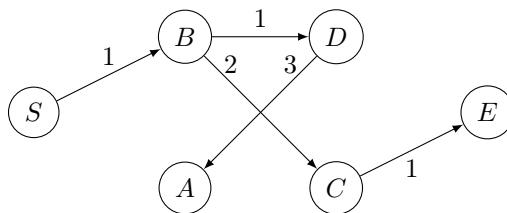
Exercice 1 — *Algorithme de Dijkstra*

Soit G le graphe suivant :



1. Dessinez un arbre des plus courts chemins de S vers les autres nœuds.

► Correction



2. Dans quel ordre l'algorithme de Dijkstra énumérerait les nœuds du graphe ?

► Correction

Dans l'ordre du poids d'un plus court chemin de S vers les autres nœuds : S, B, D, C, E, A

3. Appliquez l'algorithme pour calculer les poids des plus courts chemins de S vers les autres nœuds.

► Correction

On obtient le tableau suivant où la première ligne est l'initialisation, la seconde correspond à la première itération, X est l'ensemble des nœuds qui n'ont pas encore été explorés, u est le nœud de X choisi pendant cette itération (celui qui n'est pas encore exploré et qui est le plus proche de S), et $d(v)$ est la meilleure distance de S à v calculée à la fin de l'itération.

Iteration	X	u	$d(S)$	$d(A)$	$d(B)$	$d(C)$	$d(D)$	$d(E)$
Avant la première	-	-	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	S, A, B, C, D, E	S	0	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	A, B, C, D, E	B	0	6	1	3	2	$+\infty$
3	A, C, D, E	D	0	5	1	3	2	5
4	A, C, E	C	0	5	1	3	2	4
5	A, E	E	0	5	1	3	2	4
6	A	A	0	5	1	3	2	4

4. Comment modifier l'algorithme pour reconstruire les plus court chemins ?

► **Correction**

On construit un second tableau contenant l'information $pred(v)$ qui est le prédécesseur de v dans un plus court chemin de S à v , (sauf pour S). Au début, $pred(v)$ est inconnu. Puis, quand on modifie la valeur de $d(v)$ lors de l'itération où u est choisit, on pose $pred(v) = u$.

Iteration	X	u	$pred(A)$	$pred(B)$	$pred(C)$	$pred(D)$	$pred(E)$
Avant la première	-	-	?	?	?	?	?
1	S, A, B, C, D, E	S	S	S	?	?	?
2	A, B, C, D, E	B	B	S	B	B	?
3	A, C, D, E	D	D	S	B	B	D
4	A, C, E	C	D	S	B	B	C
5	A, E	E	D	S	B	B	C
6	A	A	D	S	B	B	C

Exercice 2 — Algorithme de Ford-Bellman

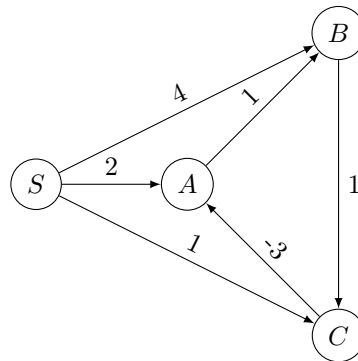
1. Soit G un graphe avec les arcs pondérés et s un nœud de ce graphe. Soit $d^k(u)$ le poids d'un plus court chemin de s vers u utilisant au plus k arcs. Montrer qu'il existe u tel que $d^{n-1}(u) > d^n(u)$ si et seulement s'il existe circuit absorbant dans le graphe.

► **Correction**

Si $d^{n-1}(u) > d^n(u)$, il existe un chemin de s à u utilisant n arcs et de poids strictement plus petit que le plus court chemin utilisant au plus $n - 1$ arcs. Un chemin avec n arcs contient un circuit. Supposons que ce circuit ne soit pas absorbant. Alors je peux le supprimer du chemin pour obtenir un chemin au moins aussi bon et avec strictement moins d'arcs, disons k , ce qui est exclus car alors $d^{n-1}(u) \leq d^k(u) \leq d^n(u) < d^{n-1}(u)$.

Sinon, alors pour tout arc (u, v) , $\omega(u, v) + d^{n-1}(u) \geq d^{n-1}(v)$. S'il existe un circuit, disons $(u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1} = u_1)$ alors $\sum_{i=1}^p \omega(u_i, u_{i+1}) + d^{n-1}(u_1) - d^{n-1}(u_{i+1}) \geq 0$. Or $\sum_{i=1}^p \omega(u_i, u_{i+1}) + d^{n-1}(u_1) - d^{n-1}(u_{i+1}) = \sum_{i=1}^p \omega(u_i, u_{i+1})$ donc le circuit n'est pas absorbant.

2. Appliquer l'algorithme de Ford-Bellman au graphe suivant :



► **Correction**

k	$d^k(S)$	$d^k(A)$	$d^k(B)$	$d^k(C)$
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	2	4	1
2	0	-2	3	1
3	0	-2	-1	1
4	0	-2	-1	0

On constate qu'il y a un circuit absorbant car $d^3(C) > d^4(C)$

Exercice 3 — Recharger les batteries

Un petit robot se déplace sur une grille. Lorsqu'il arrive sur une case, il peut aller tout droit, à droite ou à gauche mais ne peut pas revenir en arrière. Il ne peut pas tomber du plateau. S'il ne se déplace pas il consomme de l'énergie : 1 joule par seconde. S'il se déplace d'une case à une autre, il consomme 2 joules d'énergie. Il peut également recevoir 3 joules par le biais de chargeur sans fil à induction. On sait à l'avance où sont placés les chargeurs. Le robot part d'une extrémité de la grille avec une batterie à moitié pleine mais suffisante pour se déplacer au moins une fois sur chaque case du plateau. On veut déterminer si le robot peut complètement recharger sa batterie.

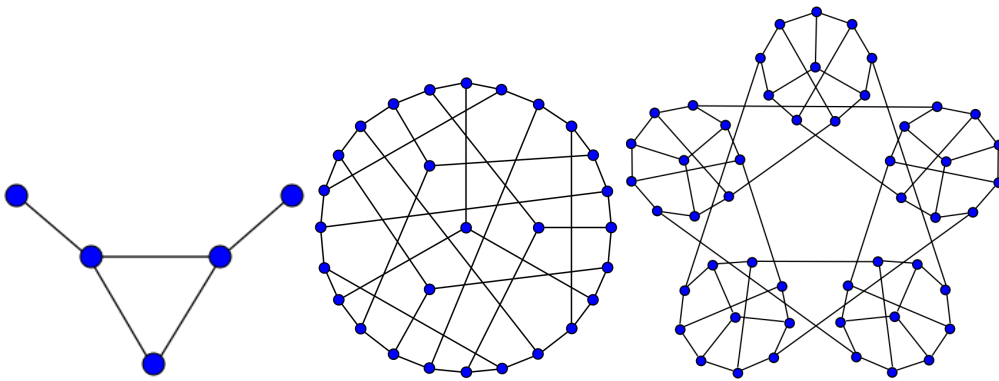
Modéliser ce problème par un problème de graphe.

► **Correction**

On peut le modéliser ainsi : à chaque case correspond 4 nœuds, un par orientation possible, représentant l'état *Le robot entre dans cette case avec cette orientation*, permettant de modéliser le fait que le robot ne peut pas revenir en arrière. On relie une case orientée à ses 3 cases voisines avec l'orientation correspondante.

Par exemple $(1, 1, N) \rightarrow (0, 1, W), (2, 1, E), (1, 2, N)$. On pondère un arc avec 2 s'il n'y a pas de chargeur sous le déplacement, et $2 - 3 = -1$ sinon. S'il existe un circuit absorbant alors le robot peut se recharger pleinement.

Exercice 4 — Quelques diamètres Quel est le diamètre des graphes suivants ?



(Source : wikipedia, par Koko90)

► **Correction**

3, 4 et 7

Exercice 5 — Diamètre d'un arbre ...