

TD 2 : Fermeture transitive

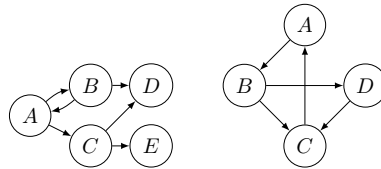
Théorie des graphes S1.

2022

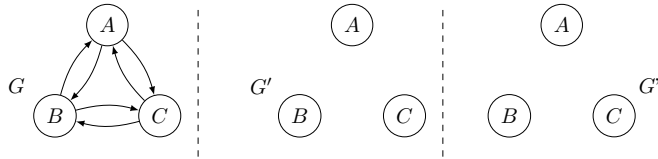
Exercice 1 — Quelques exemples et propriétés

Deux graphes G et G' sont dits **τ -équivalents** si $\tau(G) = \tau(G')$. Un graphe G' est dit **τ -minimal** **τ -équivalent** à G si G' est un graphe partiel de G , τ -équivalent à G et si on retire un arc de G' , on obtient un graphe qui n'est pas τ -équivalent à G . Un graphe G' est dit **τ -minimum τ -équivalent** à G s'il est **τ -minimal τ -équivalent** avec un nombre minimum d'arcs.

1. Dessinez la fermeture transitive des graphes suivants :



2. Ajoutez aux graphes G' et G'' des arcs tels que G' et G'' sont τ -minimal τ -équivalent à G et G'' possède strictement moins d'arc que G' .



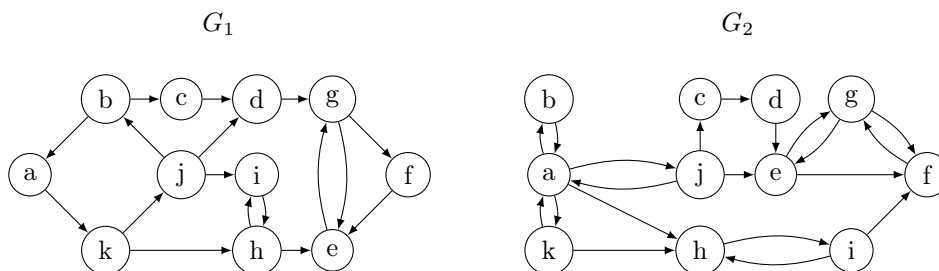
3. Montrez que G est fortement connexe si et seulement si le circuit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ est τ -équivalent à G , où les x_i sont les nœuds de G .
4. Montrez que la question précédente est fausse si on remplace τ -équivalent par τ -minimal τ -équivalent.
5. Montrez qu'un circuit élémentaire est τ -minimum τ -équivalent à lui-même.
6. Montrez qu'un graphe G est hamiltonien si et seulement si tout graphe τ -minimum τ -équivalent à G est un circuit hamiltonien de G .

Exercice 2 — τ -équivalence d'un graphe sans circuit

Soit G un graphe orienté sans circuit. Montrer qu'il existe un unique graphe G' qui soit τ -équivalent à G et qui minimise le nombre d'arcs. Montrer que G' est un graphe partiel de G .

Exercice 3 — τ -équivalence et graphes réduits

Soient G_1 et G_2 les graphes suivants :



1. Calculez les fermetures transitives des graphes G_1 et G_2 .
2. Calculez les graphes réduits G_{1R} et G_{2R} de G_1 et G_2 .
3. Calculez les fermetures transitives des graphes G_{1R} et G_{2R} .
4. Montrer que deux graphes sont τ -équivalents ssi leurs graphes réduits sont τ -équivalents.

Exercice 4 — Calculer la fermeture transitive d'un graphe

1. Décrire en français un algorithme calculant la fermeture transitive d'un graphe en utilisant les algorithmes de parcours de graphe. Quelle est sa complexité?
2. (a) Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G . Que représente A^p ?
 (b) Soit B la matrice A avec des 1 sur la diagonale. Que représente B^p ?
 (c) Décrire un algorithme en français utilisant les puissances de la matrice A ou de B pour calculer la fermeture transitive d'un graphe. Quelle est sa complexité?
3. L'algorithme de Roy-Warshall est le suivant :

ENTRÉES: Un graphe orienté $G = (U, A)$

SORTIES: La fermeture transitive de G

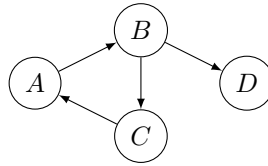
Pour $w \in U$ **Faire**

Pour $u \in U$ **Faire**

Pour $v \in U$ **Faire**

Si $(u, w) \in A$ et $(w, v) \in A$ **Alors** Ajouter (u, v) à A .

- (a) Testez l'algorithme sur le graphe suivant :



- (b) Quelle est la complexité de cet algorithme ?
 (c) Redécrire l'algorithme en utilisant la matrice d'adjacence de G .
 (d) Testez l'algorithme sur le graphe décrit par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 — Équipement d'un atelier

Dans un grand atelier sont installées neuf machines, $a, b, \dots, h$ et i . Les pièces mécaniques qui y sont fabriquées doivent passer successivement sur plusieurs machines (perceuses, soudeuses, polisseuses, ...). On désire construire, pour un coût minimum, des tapis roulants permettant de conduire les pièces d'une machine à une autre machine. Le tableau ci-dessous indique pour chaque machine M quelles sont les machines qui peuvent suivre dans la chaîne de production. On doit donc relier M à chacune de ces machines par une succession de tapis roulant. Modélisez ce problème par un problème graphe et résolvez le.

a	b, c, d, e, f, g, h, i
b	a, c, d, e, f, g, h, i
c	d, e
d	e
e	d
f	d, e, g, h, i
g	d, e, f, h, i
h	d, e, f, g, i
i	d, e, f, g, h