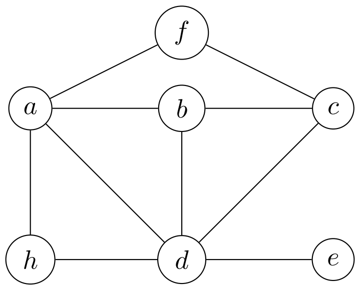
TD 3 : Cliques et Stables

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Quelques définitions*

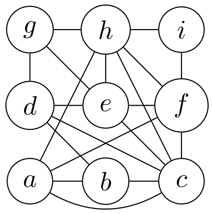
Soit G le graphe suivant :



Les poids associés aux sommets sont $p(a) = 3$, $p(b) = 2$, $p(c) = 2$, $p(d) = 4$, $p(e) = 1$, $p(f) = 1$ et $p(h) = 1$.

1. Donnez un stable maximal de G
2. Donnez un stable maximum de G
3. Donnez un stable de poids maximum de G

Exercice 2 — *Clique et stable*



1. Déterminez, dans G, une clique maximale, une clique maximum et une partition de G en 3 cliques
2. Montrer que trouver une clique dans un graphe est équivalent à trouver un stable dans un autre graphe que l'on déterminera. Donnez un exemple avec G.

Exercice 3 — *Stable et degré*

Soit G un graphe tel que $1 \leq d(x_1) \leq \ldots \leq d(x_n)$ et il existe p dans $[\![2; n]\!]$ tel que $\sum_{i=0}^{p-2} d(x_{n-i}) \leq n - p$. Montrer que tout stable maximal possède au moins p éléments.

Exercice 4 — *Stable maximum sous forme d'équations*

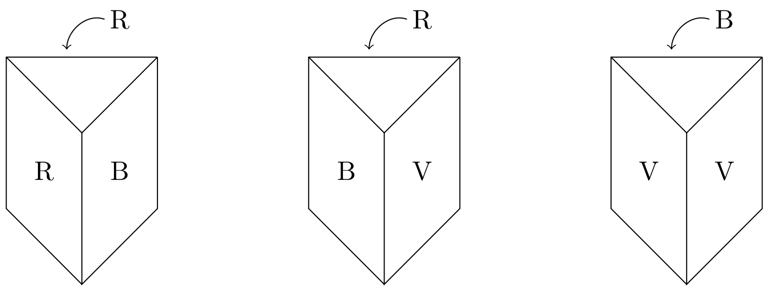
1) Soit P le problème suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lcl} Max \quad t+u+v+w+x+y+z & & \\ s.c. & & \\ \qquad x+y+z & \leq & 1 \\ \qquad z+t+u & \leq & 1 \\ \qquad x+v & \leq & 1 \\ \qquad t+w & \leq & 1 \\ \qquad t,u,v,w,x,y,z \in \{0,1\} & & \end{array}\right.$$

1. Montrer que ce problème est équivalent à la recherche d'un stable de cardinal maximum dans un graphe G que l'on déterminera.
2. Trouver une solution optimale de P.

Exercice 5 — *Empiler*

Soient C_1, C_2, C_3 les trois cylindres (à base triangulaire) suivants. Ils sont colorés sur les trois faces verticales (pas sur les bases). La couleur de la face arrière est indiquée en haut.



On cherche une façon d'empiler parallèlement les cyclindres de sorte que chaque face de la pile ainsi construite possède au plus une fois chaque couleur. Modéliser ce problème par un problème de graphe et le résoudre.

Exercice 6 — *Plan de mariage*

Comment effectuer à un mariage un plan de table de sorte que deux personnes qui ne s'apprécient pas ne soient pas à la même table ? Modéliser ce problème par un problème de graphe.