

TD 4 : Degrés

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Propriété des degrés*

Soit un graphe $G = (V, E)$ non orienté avec $n = |V|$ et $m = |E|$.

1. Montrer qu'il existe deux nœuds qui ont le même degré.
2. Montrer que $\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m$.
3. Montrer que le nombre de nœuds de degré impair est pair.
4. Cela reste-il vrai pour les graphes orientés ?
5. Cela reste-il vrai pour les graphes infinis ?
6. Combien d'arêtes possède un graphe dont tous les nœuds sont de degré d ?

Exercice 2 — *Ma vie sociale est nulle (en moyenne)* On veut montrer que, dans

un réseau social, la plupart des gens ont l'impression d'avoir moins d'amis que leurs amis. On représente le réseau par un graphe non orienté avec n nœuds (les gens) et m arêtes (les liens d'amitiés).

1. Montrer que la moyenne du nombre d'amis d'une personne est $\frac{2m}{n}$.
2. On considère la liste contenant, pour chaque personne, pour chaque ami de cette personne, le nombre d'amis de cet ami. Montrer que la moyenne de cette liste, *i.e.* la moyenne du nombre d'amis d'un ami, est $\frac{\sum_{v \in V} \deg(v)^2}{2m}$.
3. En déduire qu'une personne moyenne a l'impression d'avoir moins d'ami que ses amis

Exercice 3 — *Petite poignée de main*

Le couple Madame M et monsieur N invitent 4 couples chez eux. En arrivant, certains se saluent, d'autres non, en particulier les membres d'un couple ne se saluent pas. Monsieur N a demandé à tout le monde combien de personnes ils avaient salué et chaque personne a donné une réponse différente.

1. Montrer alors que
 - pour chaque couple, les deux personnes du couple ont serré ensemble 8 mains ;
 - Madame M et Monsieur N ont salué les mêmes personnes.
2. Cela est-t-il toujours vrai si madame M n'est pas en couple avec monsieur N ?

Exercice 4 — *Quelques graphes simples*

Decrivez le degré des nœuds

- dans une clique de taille K ?
- dans un cycle de taille C ?
- dans un arbre ?
- dans un chemin ?
- dans une grille ?

Exercice 5 — *Graphe dense et chemin*

Soit G un graphe où chaque nœud a au moins un degré d . Montrer qu'il existe une chaîne avec $d + 1$ nœuds dans G .

Exercice 6 — *Accès par autoroutes*

Dans un département comptant $2p + 1$ villes, chaque ville est reliée à p autres villes par une autoroute. Montrer qu'il est possible de se rendre depuis le chef-lieu du département dans toutes les autres villes en empruntant que des autoroutes.