

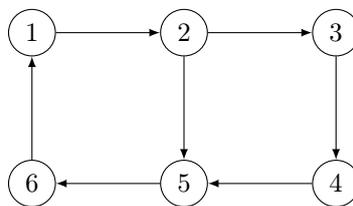
TD 5 : Fonction de Grundy, Noyau et jeu de Nim

Théorie des graphes S1.

2022

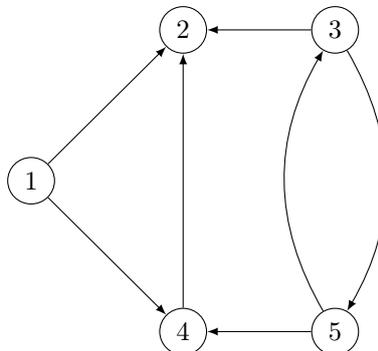
Exercice 1 — *Fonction de Grundy*

1. Donnez la ou les fonctions de Grundy du graphe G suivant.
2. En déduire deux noyaux de G



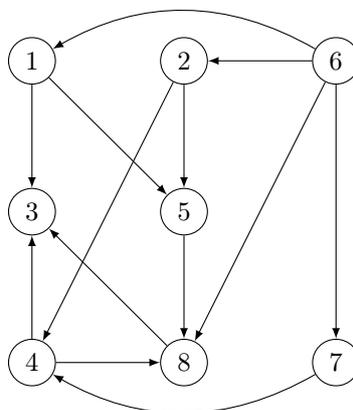
Exercice 2 — *Surveillance*

Soit un ensemble de points à surveiller et le graphe G associé où un arc (i, j) signifie que i peut surveiller j . Combien faut-il au minimum de surveillants pour que tous les points soient surveillés, et où les placer ? Modéliser le problème par un problème de graphes et le résoudre.



Exercice 3 — *Fonction de Grundy sans circuit*

Soit $G = (V, A)$ le graphe suivant :



1. Montrer que, dans tout graphe sans circuit, il existe une fonction injective $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $(u, v) \in A \Leftrightarrow f(u) < f(v)$.
2. En déduire que G admet une fonction de Grundy unique et un noyau.
3. Calculer la fonction de Grundy de G et un noyau de G .

Exercice 4 — *Jeux de Nim*

Soit les jeux suivants. Déterminez pour lesquels le joueur 1 a une stratégie gagnante et pour lesquels le joueur 2 a une stratégie gagnante. Le premier joueur est toujours le joueur 1.

1. Deux joueurs ont devant eux n baguettes. À chaque tour, un joueur retire 1, 2 ou 3 baguettes. Le joueur obligé de retirer la dernière baguette perd le jeu.
2. Deux joueurs ont devant eux une tablette de chocolat avec $n \times m$ lignes et colonnes. A chaque tour, un joueur doit manger soit autant de lignes qu'il veut soit autant de colonne qu'il veut (au moins une). Le perdant est celui qui doit manger le dernier carré de chocolat.
3. Deux joueurs ont devant eux un plateau avec des jetons disposés sur une grille (certains cases peuvent être vides). A chaque tour, un joueur doit choisir un jeton, le retirer lui et tous ses voisins (horizontaux, diagonaux et verticaux). Le joueur qui retire le dernier jeton gagne la partie.