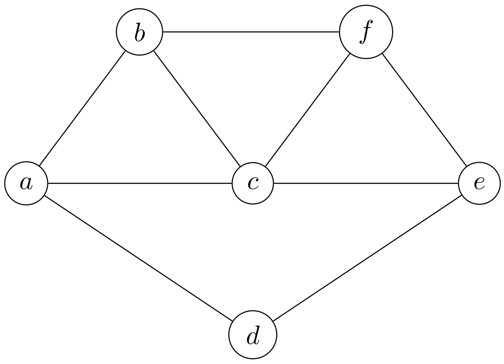
TD 6 : Base de cycles et cocycles

Théorie des graphes S1.

2022

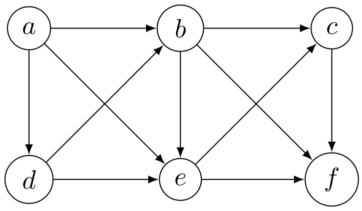
Exercice 1 — *Rechercher des bases*



1. (a) Donner les vecteurs associés aux cycles $(bcfb)$ et $(abfeda)$.
   (b) Montrer que le cycle $(bcfb)$ est combinaison linéaire de deux autres cycles que l'on déterminera.
   (c) Combien d'éléments comporte une base de cycles de G ?
   (d) Donner une base de cycles de G qui ne contient ni (b c f b) ni $(abfeda)$.
   (e) Exprimer $(abfeda)$ en fonction de la base calculée à la question précédente.
2. (a) Donner les vecteurs associés aux cocycles (abf) et (ae).
   (b) Montrer que le cocycle (ae) est combinaison linéaire de deux autres cocycles que l'on déterminera.
   (c) Combien d'éléments comporte une base de cocycles de G ?
   (d) Donner une base de cocycles de G qui ne contient aucun cocycle réduit à un nœud.
   (e) Exprimer (abf) en fonction de la base calculée à la question précédente.

Exercice 2 — *Orthogonalité des cycles et des cocycles*

1. Dans le graphe G suivant, donner les vecteurs de cycle $\mu(abcfeda)$ et $\mu(bdefb)$ et les vecteurs de cocycle $\nu(ac)$ et $\nu(bdef)$. Vérifiez que les deux premiers vecteurs sont chacun orthogonaux aux deux derniers.



2. Soit v un nœud d'un graphe $G = (V, E)$ et c un cycle ne contenant pas v. Montrer que $\nu(v) \perp \mu(c)$.

3. Soit v un nœud d'un graphe $G = (V, E)$ et c un cycle contenant v. Montrer que $\nu(v) \perp \mu(c)$.
4. Soit un graphe $G = (V, E)$ avec p composantes connexes et $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ des nœuds de G, un par composante. Montrer que $B = (\nu(u), u \in V \backslash \{v_1, v_2, \ldots, v_p\})$ est une base de cocycles de G.
5. En déduire que, dans un graphe G, tous les cocycles de G sont orthogonaux à tous les cycles de G.