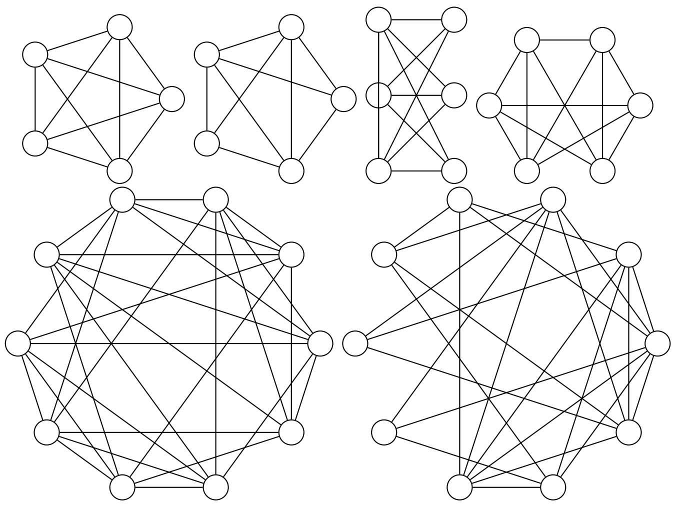
TD 7 : Graphes planaires

Théorie des graphes S1.

2022

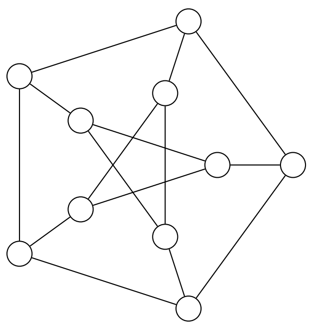
Exercice 1 — *Planaire ?*

Parmi les graphes suivants : lesquels sont planaires ou non ? Si c'est le cas, vérifiez la formule d'Euler. Sinon pourquoi n'est-il pas planaire ?



Exercice 2 — *Le graphe de Petersen*

On veut montrer que le graphe suivant, nommé graphe de Petersen, n'est pas planaire.



1. Montrez que ce graphe vérifie $m < 3n - 5$
2. Montrez que ce graphe ne contient aucun cycle de taille inférieure ou égale à 4.
3. Soit G un graphe planaire simple et connexe n'ayant pas de cycle de taille inférieure ou égale à c, montrer que $m < \frac{(c+1)(n-2)}{c-1} + 1$.
4. En déduire que le graphe de Petersen n'est pas planaire.

Exercice 3 — *$K_{3,3}$ est planaire sur un mug !*

Montrer qu'il est possible de dessiner $K_{3,3}$ planaire sur un tore.

Exercice 4 — *Dessin de circuit imprimé*

Des composants $(A, B, C, \ldots, G)$ ayant un à quatre points de connexions $(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, \ldots)$ trop rapprochés pour permettre le passage d'une liaison entre eux, doivent être implantés sur une plaquette de circuit imprimé. Deux connections ne doivent pas se croiser. Les connexions à établir sont : .

$a_1 - d_1, a_2 - e_1, b_1 - e_2, b_1 - g_2, b_2 - f_1, b_3 - d_2, c_1 - f_2, c_2 - g_1, c_3 - e_3, c_4 - d_3$

1. Montrer qu'il est possible de placer ces connexions sur le circuit imprimé.
2. Montrer que dans un graphe biparti planaire simple et connexe, $m < 2n - 3$.
3. Est-il possible d'ajouter une connexion supplémentaire entre les deux parties du graphe sans qu'il y ait une intersection entre deux connexions ?

Exercice 5 — *Base de cycle et graphe planaire*

Soit G un graphe planaire. On veut montrer que ses faces internes forment une base de cycles. On va le montrer par récurrence sur f, le nombre de faces. Soient $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{f-1}\}$ les faces internes de G.

1. Supposons que G n'a aucune face interne, montrer qu'il n'a aucun cycle. En déduire que la propriété est vraie quand $f = 1$.
2. Supposons maintenant la propriété vraie pour tout graphe avec f faces.
   (a) Soit e une arête du cycle entourant F_1. Montrer que $G \backslash \{e\}$ est planaire. En déduire une base de cycles.
   (b) Montrer que si on ajoute F_1 à cette base de cycles, alors on a une base de cycles de G.
   (c) Que peut-on dire si tous les cycles de la base de cycles de $G \backslash \{e\}$ sont des faces internes de G ? Présenter un cas où cela survient.
   (d) Si ce n'est pas le cas, montrer qu'au plus un cycle C de cette base n'est pas une face interne de G.
   (e) Montrer que $C \oplus F_1$ est une face interne de G.
   (f) En déduire que les faces internes de G forment une base de cycles.