

TD 8 : Coloration minimum d'un graphe

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — Quelques bornes

On note $\chi(G)$ le nombre chromatique de G .

1. Quel est le nombre chromatique d'un cycle élémentaire ? D'un graphe biparti ?
2. Soit G_0 un graphe partiel de G . Quelle relation peut-on établir entre les nombres chromatiques de ces graphes ? En déduire que si la taille d'une clique maximum de G est $\omega(G)$ alors $\chi(G) \geq \omega(G)$.
3. Soit G un graphe d'ordre n , avec $\alpha(G)$ la taille du plus grand stable de G . Prouver que :
 - $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$
 - $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$
4. Montrer qu'il existe des graphes qui sont 4-coloriables et qui ne sont pas planaires.

Exercice 2 — Orientation

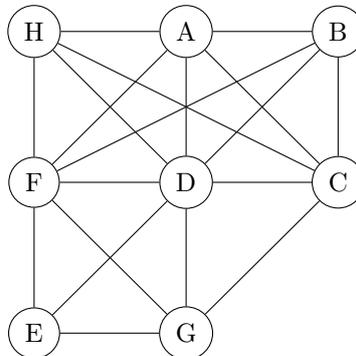
Soit G un graphe et k un entier strictement positif. Montrer que si G est k -colorable alors il existe une orientation des arêtes de G qui soit sans circuit et telle que tout chemin est de longueur inférieure ou égale à k .

Exercice 3 — Graphe planaire

Décrire un algorithme simple qui, connaissant un graphe planaire G , renvoie un entier k égal soit à $\chi(G)$, soit à $\chi(G) + 1$.

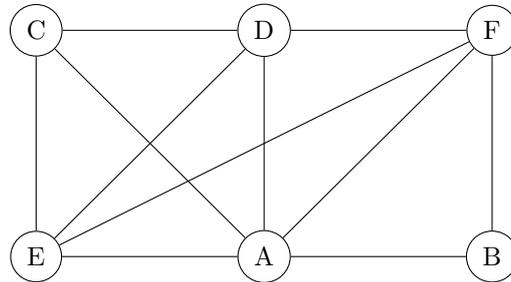
Exercice 4 — Algorithme glouton

1. Appliquer l'algorithme glouton de coloration de Welsh Powell sur le graphe suivant et vérifier que le nombre de couleurs obtenu est inférieur ou égal à la borne k où k est le numéro du dernier sommet vérifiant $k \leq d_k + 1$.
2. En utilisant les différentes bornes connues du nombre chromatique, peut-on dire si la coloration obtenue est optimale ?



Exercice 5 — Reliement contraction

Appliquez l'algorithme de reliement contraction sur le graphe suivant.



Exercice 6 — Planning

Cinq étudiants doivent passer certaines épreuves d'examen. On désire que tous les étudiants qui doivent subir une même épreuve le fassent simultanément. Chaque étudiant ne peut se présenter qu'à une épreuve au plus chaque jour.

Voici la liste des épreuves que doit passer chaque étudiant :

- Etudiant A : Français, Anglais, Mécanique
- Etudiant B : Anglais, Solfège
- Etudiant C : Dessin, Histoire des arts, Mécanique
- Etudiant D : Dessin, Histoire des arts
- Etudiant E : Solfège

Modéliser ce problème par un problème de coloration des nœuds. Dans quel cas ce problème peut être modélisé par une coloration d'arête ? En déduire que le nombre minimum de jours d'examen est 3 ou 4.

Exercice 7 — Coloration de Sudoku

Modéliser un problème de sudoku classique par un problème de coloration d'un graphe que l'on déterminera.