

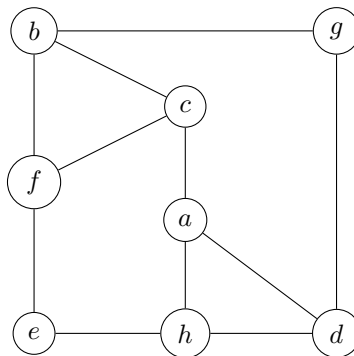
TD 9 : Arbres couvrants

Théorie des graphes S1.

2022

Exercice 1 — *Arbre couvrant et base de cycle*

Soit G le graphe suivant :



1. Donner un arbre couvrant T de G tel que la base de cycle associée corresponde à l'ensemble des faces finies de G .

Exercice 2 — *Conception d'un réseau de transmission de données*

Une banque désire installer au moindre coût un réseau de transmissions de données entre son agence centrale située dans le quartier de la Bourse à Paris et sept de ses succursales. Le coût de construction d'une ligne entre deux agences est donné par le tableau suivant :

	B	O	E	R	SL	L	N
Bourse							
Opera	5						
Etoile	18	17					
République	9	11	27				
St-Lazare	13	7	23	20			
Louvre	7	12	15	15	15		
Neuilly	38	38	20	40	40	35	
Chatelet	22	15	25	25	30	10	45

Modélisez ce problème par un problème de graphe et résolvez le.

Exercice 3 — *Quelques propriétés des arbres*

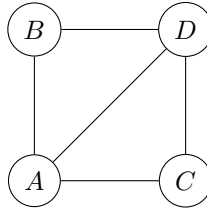
1. Montrer que tout arbre avec 2 sommets admet au moins deux sommets pendants (i.e. de degré 1).
2. Démontrer que tout graphe connexe d'au moins deux sommets admet au moins deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.
3. Donner un graphe qui n'a que deux sommets qui ne sont pas des points d'articulation.

Exercice 4 — Connexité du graphe des arbres couvrant

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres couvrant de G . Soit $H = (\mathcal{T}, E_H)$ le graphe où

- les nœuds sont des arbres couvrants de G
- une arête relie deux nœuds de H correspondant aux arbres couvrant T_1 et T_2 de G si et seulement si toutes les arêtes de T_1 et T_2 sauf une sont identiques.

1. Dessinez H quand G est le graphe suivant :



2. Montrer que H est connexe.

Exercice 5 — Algorithme de Prim

L'algorithme de Prim trouvant un arbre couvrant de poids minimum est le suivant :

ENTRÉES: Un graphe $G = (V, E)$ non orienté connexe et des poids $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

SORTIES: Un arbre couvrant de poids minimum de G

$T = (V_T, E_T) = (\emptyset, \emptyset)$

Ajouter un nœud v quelconque à V_T

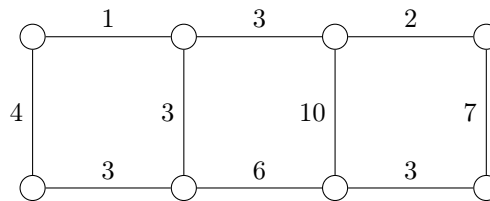
Tant que $|V_T| \neq |V|$ **Faire**

Ajouter à E_T une arête de poids minimum reliant un nœud u de V_T et un nœud v de $V \setminus V_T$.

Ajouter v à V_T

Renvoyer T

1. Appliquez l'algorithme sur le graphe suivant :



2. Soit T_i l'arbre T au début de l'itération i et e l'arête choisie pendant l'itération i . Soit $\mathcal{T}_i$ l'ensemble des arbres couvrant de G contenant T_i . Montrer qu'il existe un arbre de $\mathcal{T}_i$, de poids minimum et contenant e .
3. En déduire que l'algorithme de Prim renvoie un arbre couvrant de poids minimum.