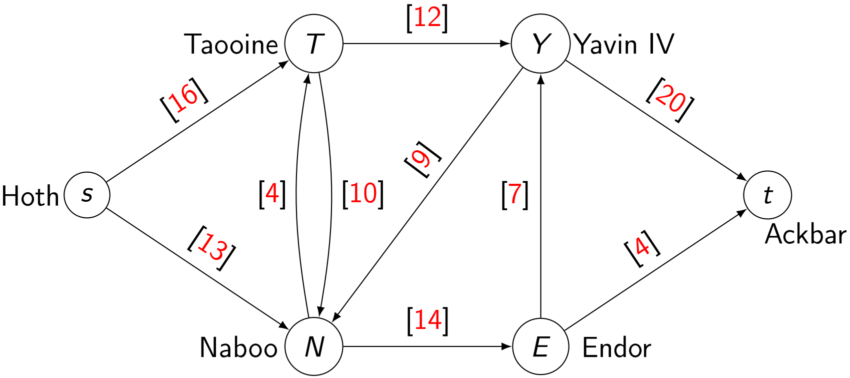
Chapitre 3 : Le problème du flot maximum

ENSIIE - Module de Recherche Opérationnelle

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

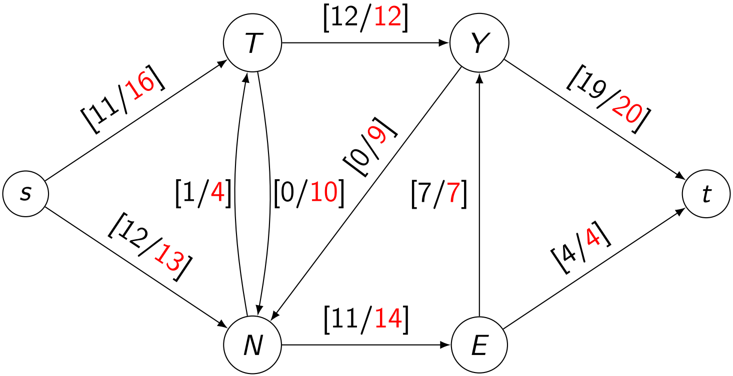
2022

Problème de dimensionnement de route



[x] : Débit maximum de personnes sur la route.
Combien de personnes peuvent quitter s pour rejoindre t ?

Problème de dimensionnement de route



Réponse : 23

Quel algorithme utiliser pour le calculer ?

Comment prouver l'optimalité de cette réponse ?

Formulation du problème

Définition

Un *réseau de transport* ou *réseau de flot* est constitué de :

- un graphe orienté $G = (V, A)$;
- deux nœuds $s \in V$ (la source) et $t \in V$ (le puits) ;
- des capacités sur les arcs $c : A \to \mathbb{R}^+$.

Formulation du problème

Définition

Un *réseau de transport* ou *réseau de flot* est constitué de :

- un graphe orienté $G = (V, A)$;
- deux nœuds $s \in V$ (la source) et $t \in V$ (le puits) ;
- des capacités sur les arcs $c : A \to \mathbb{R}^+$.

Définition

Un *flot admissible* est une fonction réelle positive f sur A telle que

- pour tout arc $a \in A$, $f(a) \in [0, c(a)]$ (contrainte de capacité)
- pour tout nœud $v \in V$ **exceptés** s **et** t,
  $\sum_{a \in \gamma^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \gamma^+(v)} f(a)$ (contrainte de conservation)

Vocabulaire

$f(a)$ est appelé le *flux* de a.

Remarque

Théorème

Si f est un flot admissible alors, pour tout sous-ensemble de nœuds $V' \subset V \backslash \{s,t\}$, la constrainte de conservation est vérifiée : $\displaystyle\sum_{a \in \gamma^-(V')} f(a) = \sum_{a \in \gamma^+(V')} f(a)$.

(exemple au tableau)

Formulation du problème

Définition

La *valeur* v d'un flot f est le flot entrant en le puits t, ou le flot sortant en la source s.

$$v = \sum_{a \in \gamma^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \gamma^+(t)} f(a)$$

$$v = \sum_{a \in \gamma^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \gamma^-(s)} f(a)$$

$$v = f_1 + f_2 - f_3 = f_4 - f_5 - f_6$$

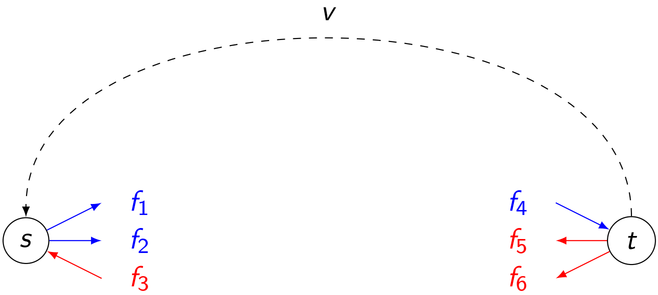
Formulation du problème

Le problème de flot maximum

- Entrée : un réseau de transport (G, s, t, c).
- Solution réalisable : un flot admissible f sur G (respecte les contraintes de capacités et de conservation)
- Solution optimale : un flot admissible f dont la valeur v est maximum.

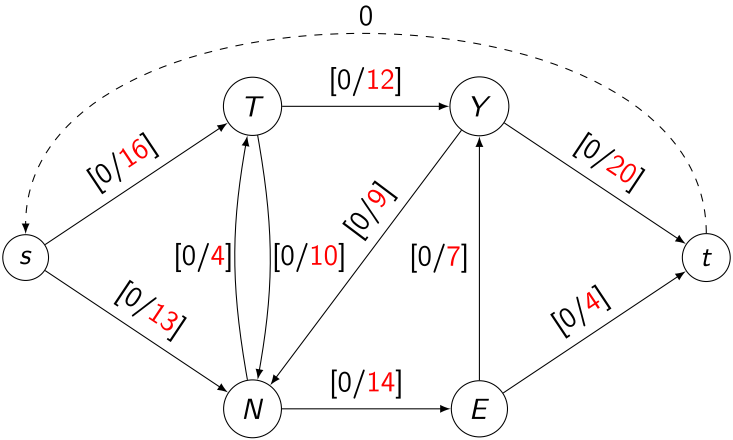
Remarque

Il est possible d'ajouter un arc fictif reliant t à s dont le flux $f(t, s)$ est toujours la valeur v du flot f. Dans ce cas, la contrainte de conservation est aussi vérifiée par s et t.



$$v + f_3 = f_1 + f_2$$
$$v + f_5 + f_6 = f_4$$

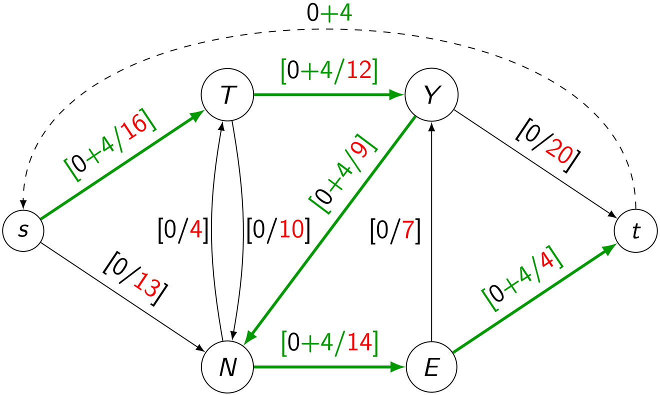
Le flot nul



Le flot nul est toujours admissible.

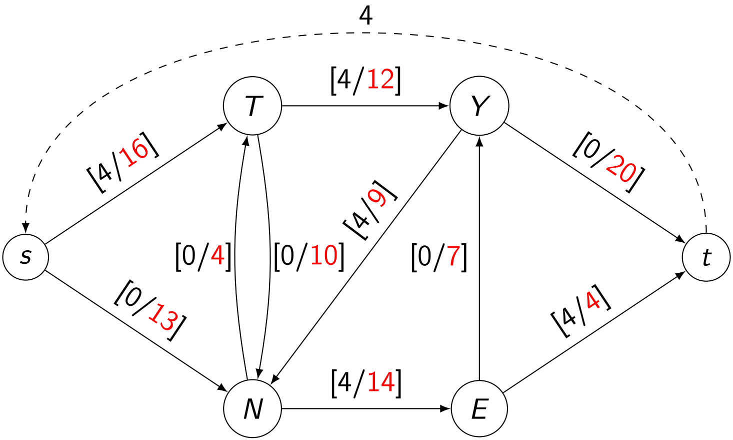
Amélioration le long d'un chemin

Si on augmente le flux d'une valeur α sur tous les arcs le long d'un chemin de s à t, la valeur du flot augmente de α.



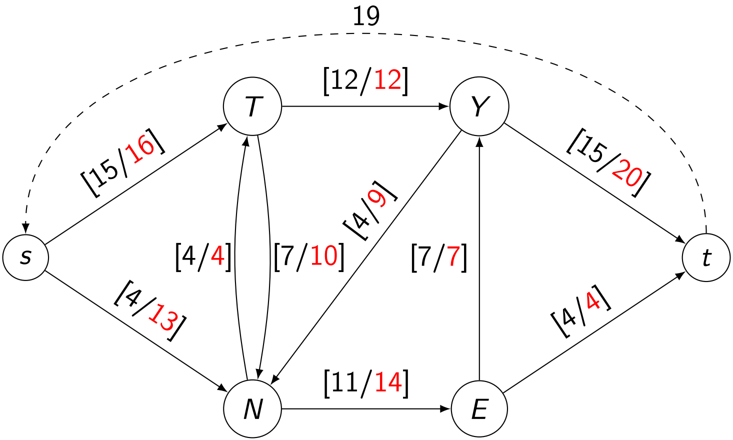
Augmentation de 4

Amélioration le long d'un chemin



Suite au tableau

Amélioration le long d'un chemin



On est bloqué...

Flot complet

Définition

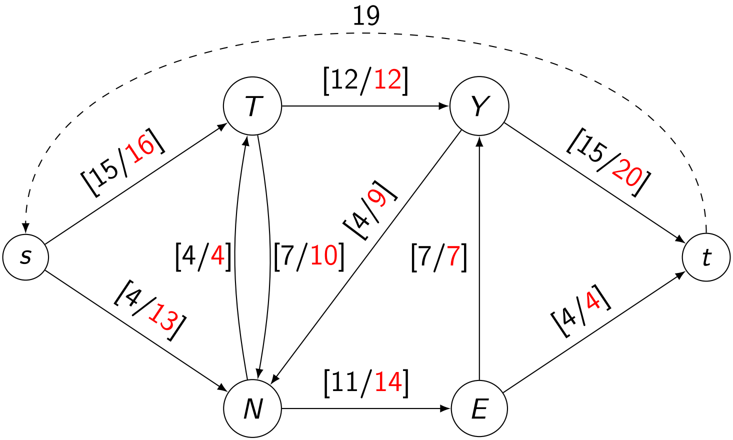
Un flot f est dit *complet* si, dans le graphe G, tout chemin de s à t contient un arc a saturé, autrement dit $f(a) = c(a)$.

ATTENTION

Un flot complet n'est pas nécessairement maximum.

La preuve est que, dans notre exemple, le flot maximum est au moins 23 (d'après le flot en début de cours).

Amélioration le long d'un chemin



Idée : ajouter 4 à (s, N) et (Y, t) et retirer 4 à (Y, N). Comment formaliser et généraliser cette idée ?

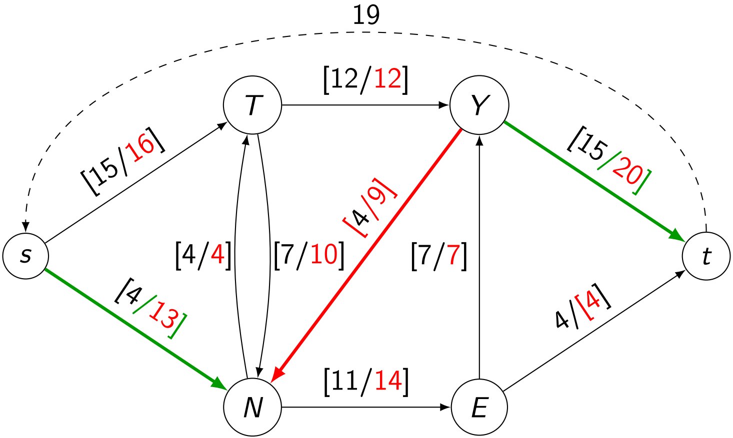
Chaînes augmentantes

Definition

Une *chaîne augmentante* μ dans le réseau (G, s, t, c) muni d'un flot admissible f est une **chaîne** (non orientée) reliant s à t telle que :

- pour tout arc a de μ orienté de s vers t (dans le *bon* sens), $f(a) < c(a)$. On note $a \in \mu^+$.
- pour tout arc a de μ orienté de t vers s (dans le sens *inverse*), $f(a) > 0$. On note $a \in \mu^-$.

Chaîne augmentante



$\mu^+ = \{(s,N);(Y,t)\}; \mu^- = \{(Y,N)\}$

Chaînes augmentantes

Definition

Une *chaîne augmentante* μ dans le réseau (G, s, t, c) muni d'un flot admissible f est une **chaîne** (non orientée) reliant s à t telle que :

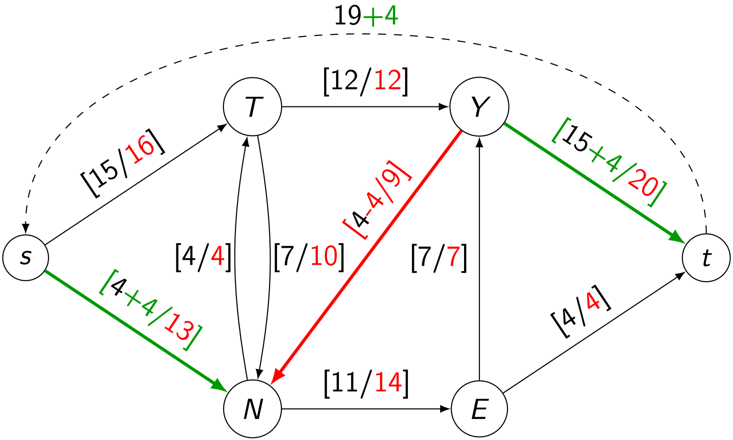
- pour tout arc a de μ orienté de s vers t (dans le *bon* sens), $f(a) < c(a)$. On note $a \in \mu^+$.
- pour tout arc a de μ orienté de t vers s (dans le sens *inverse*), $f(a) > 0$. On note $a \in \mu^-$.

Un tel chemin permet d'augmenter la valeur du flot de

$$v \to v + \min\left(\min_{a \in \mu^+}\{c(a) - f(a)\}; \min_{a \in \mu^-}\{f(a)\}\right)$$

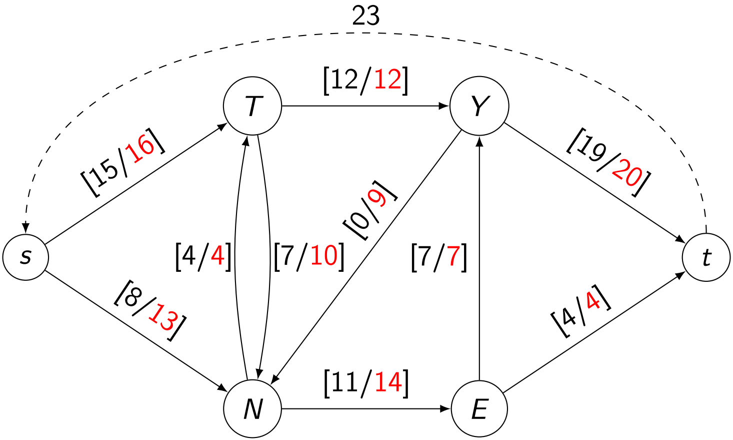
(On ajoute du flot sur les arcs dans le bon sens, et on en retire aux arcs dans le mauvais sens)

Chaîne augmentante



$$\min\left(\min_{a\in\mu^+}\{c(a)-f(a)\};\ \min_{a\in\mu^-}\{f(a)\}\right)=4$$

Chaîne augmentante



Plus de chaîne augmentante. Le flot est maintenant maximum.

Comment trouver un flot maximum ?

Théorème

Dans un réseau de transport muni d'un flot, il n'y a aucune chaîne augmentante si et seulement si le flot est maximum.

Preuve : plus tard. On a besoin d'outils supplémentaires.

Algorithme de Ford-Fulkerson : le principe

Soit (G, s, t, c) un réseau de transport

- Initialiser un flot f, nul sur tous les arcs.
- **Tant qu**'il existe une chaîne augmentante μ dans G **faire**
  - $dv \leftarrow \min\left(\min_{a \in \mu^+}\{c(a) - f(a)\}; \min_{a \in \mu^-}\{f(a)\}\right)$
  - $\forall a \in \mu^+, f(a) \leftarrow f(a) + dv$
  - $\forall a \in \mu^-, f(a) \leftarrow f(a) - dv$
- Renvoyer f

Trouver une chaîne augmentante

Version 1 : Le réseau résiduel

Définition

Soit $(G = (V, A), s, t, c)$ un réseau de transport et un flot f réalisable. On définit le *réseau résiduel* comme un graphe $H = (V, B)$ et un poids $\omega : B \to \mathbb{N}$ sur les arcs de H tels que :

- pour tout arc $a = (u, v) \in A$ tel que $f(a) < c(a)$, on ajoute un arc $b = (u, v) \in B$ de poids $\omega(b) = c(a) - f(a)$
- pour tout arc $a = (u, v) \in A$ tel que $f(a) > 0$, on ajoute un arc $b = (v, u) \in B$ de poids $\omega(b) = f(a)$

(Exemple au tableau)

Trouver une chaîne augmentante

Version 1 : Le réseau résiduel

Lemme

Il existe une chaîne augmentante dans G si et seulement s'il existe un chemin de s vers t dans H.

(Preuve et Exemple au tableau)

Trouver une chaîne augmentante

Version 2 : Algorithme de marquage

1. Marquer la source s avec " $+$ "
2. **Pour** tout arc $(u, v) \in A$, **faire**
    - **Si** u est marqué, v est non marqué et $f(u, v) < c(u, v)$, **alors** marquer v avec " $+(u)$"
    - **Si** v est marqué, u est non marqué et $f(u, v) > 0$, **alors** marquer u avec " $-(v)$"
3. **Recommencer** 2 si au moins un nœud a été marqué.

(Exemple au tableau)

Trouver une chaîne augmentante

Version 2 : Algorithme de marquage

Lemme

t est marqué si et seulement s'il existe une chaîne augmentante dans G

Dans ce cas, pour trouver la chaîne, il faut suivre le marquage en remontant depuis t
(Preuve et Exemple au tableau)

Le problème de la coupe minimum

Définition

Soit $(G = (V, A), s, t, c)$ un réseau de transport. Une *coupe* séparant s de t, ou s-t coupe est une partition de V en deux sous-ensembles $S \uplus T = V$ tels que $s \in S$ et $t \in T$.
La capacité d'une coupe est $c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$.

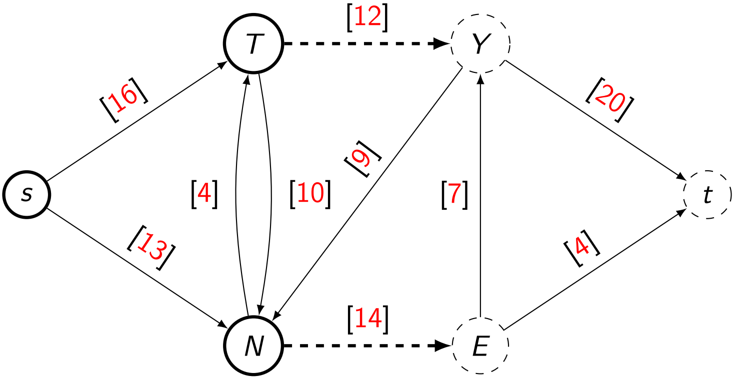
- La capacité d'une coupe est la somme des capacités des arcs entrant en T (ou, de manière équivalente, quittant S).
- Supprimer ces arcs revient à **couper** tous les chemins de s à t.

Le problème de la coupe minimum

Le problème de la coupe minimum

- Entrée : un réseau de transport (G, s, t, c).
- Solution réalisable : une coupe (S, T) séparant s de t
- Solution optimale : une s-t coupe de capacité minimum.

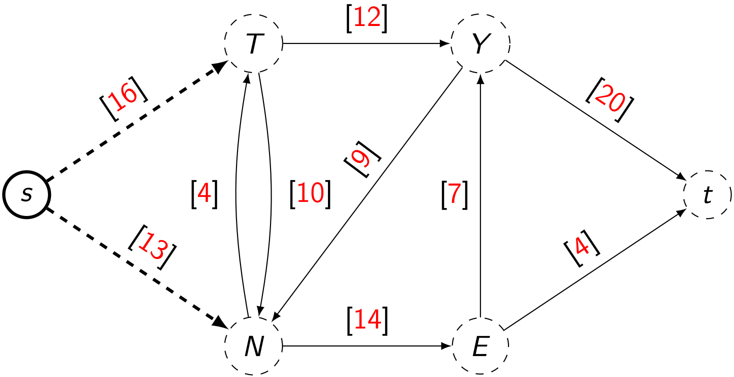
Exemples de coupe



(S en gras, T en pointillé)

Capacité $c(S, T)$: 12+14=26

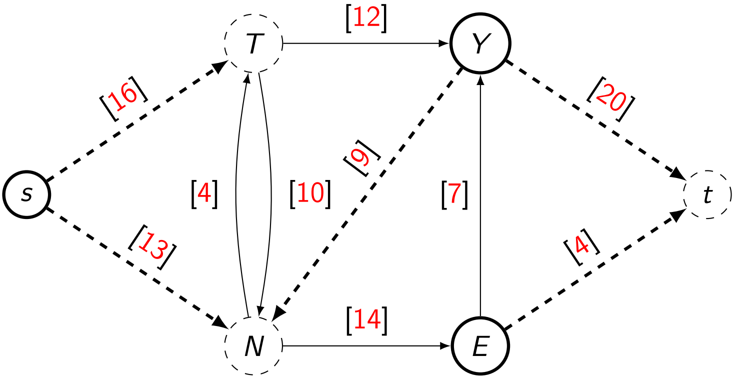
Exemples de coupe



(S en gras, T en pointillé)

Capacité $c(S, T)$: 13+16=29

Exemples de coupe



(S en gras, T en pointillé)

Capacité $c(S, T)$: $13+16+9+20+4=62$

Le théorème (faible) de la coupe minimum et du flot maximum

Theorème

Soit (G, s, t, c) un réseau de transport, un flot f admissible sur G de valeur v et une $s - t$ coupe (S, T), alors $c(S, T) \geq v$.

Preuve : le flot entrant en t ne peut être plus grand que le flot entrant en T

Le théorème (fort) de la coupe minimum et du flot maximum

Theorème

Soit (G, s, t, c) un réseau de transport, un flot maximum f admissible sur G de valeur v et une $s - t$ coupe (S, T) minimum, alors $c(S, T) = v$.

La preuve démontre également le théorème suivant :

Théorème

Dans un réseau de transport muni d'un flot, il n'y a aucune chaîne augmentante si et seulement si le flot est maximum.

(Preuve au tableau)

Calculer une coupe minimum

Lorsque l'algorithme de Ford-Fulkerson s'arrête, version 1.

- Dans ce cas, on a prouvé qu'il n'y a pas de chemin de s vers t dans le réseau résiduel H.
- Soit S l'ensemble des nœuds x tels qu'il existe un chemin de s vers x dans H ; et T les autres nœuds.
- (S, T) est une coupe minimum.

Calculer une coupe minimum

Lorsque l'algorithme de Ford-Fulkerson s'arrête, version 2.

- Dans ce cas, on a prouvé que t est non marqué.
- Soit S l'ensemble des nœuds marqués ; et T les autres nœuds.
- (S, T) est une coupe minimum.