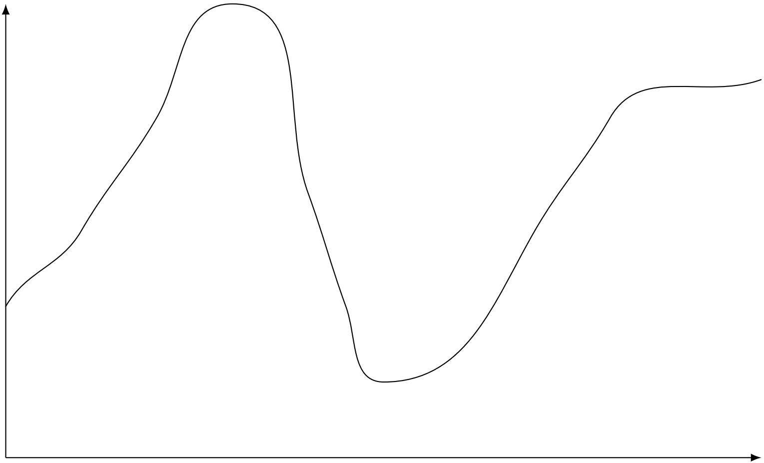
Chapitre 6 : Méthodes des pénalités et des barrières

ENSIIE - Module de Recherche Opérationnelle

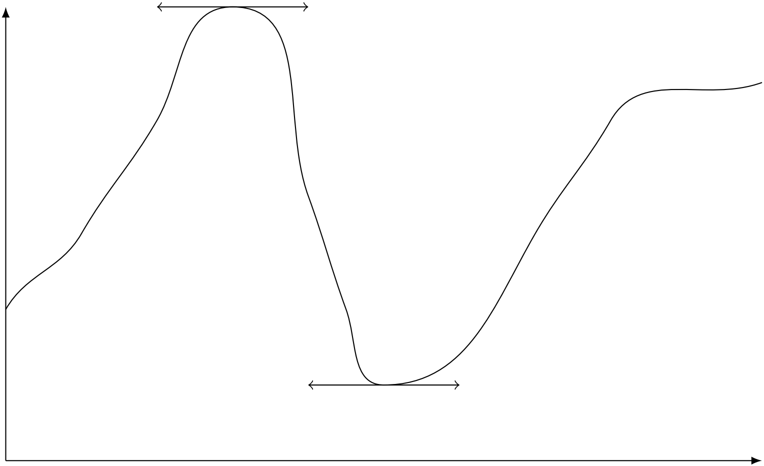
Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2024

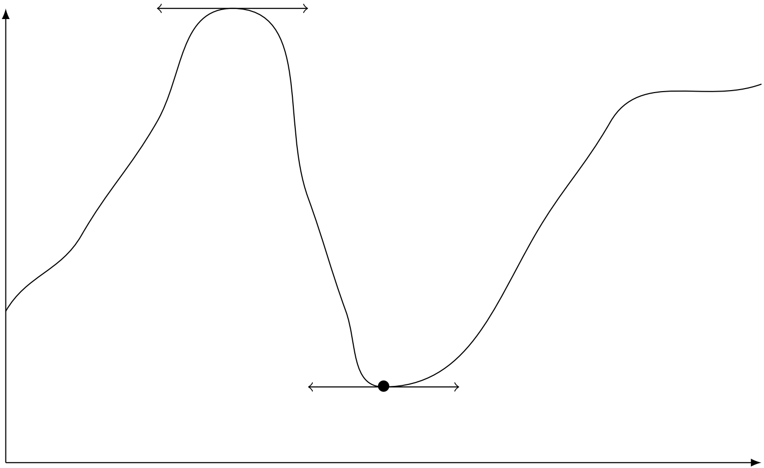
Optimisation sans contrainte



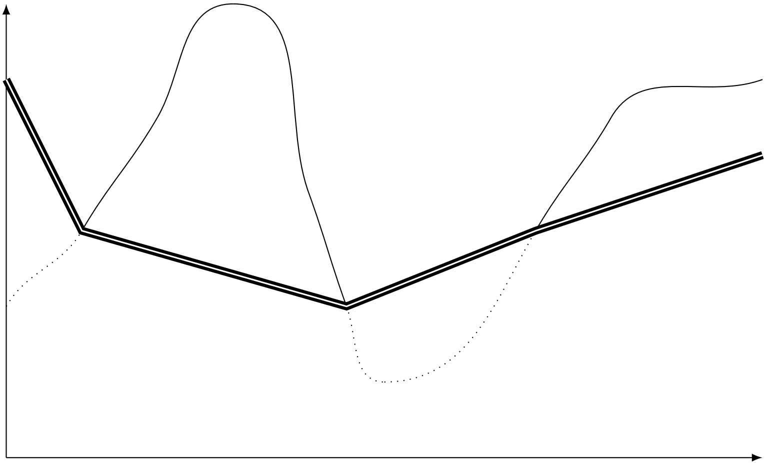
Optimisation sans contrainte



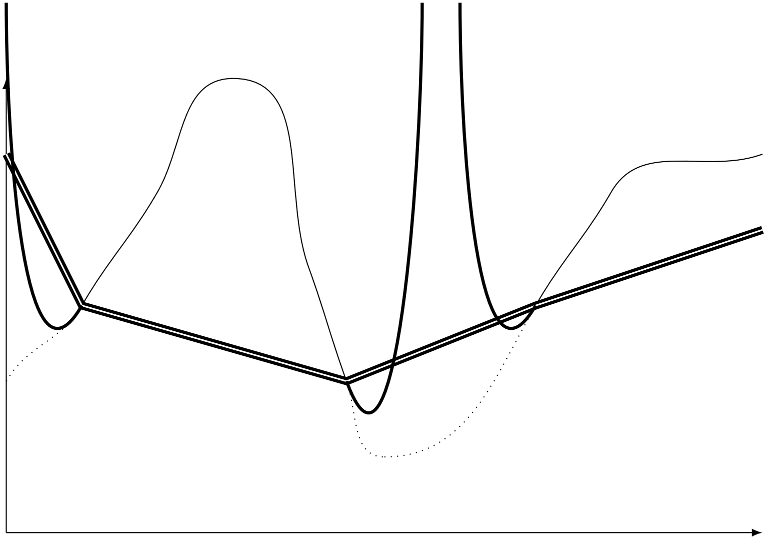
Optimisation sans contrainte



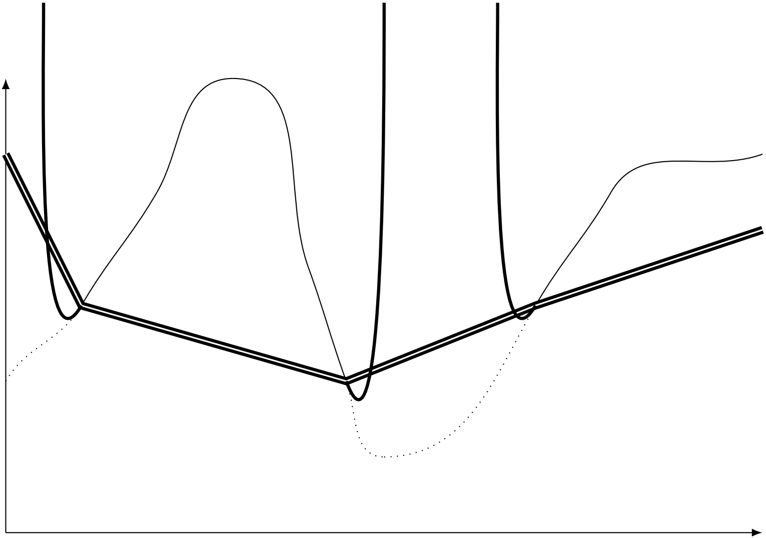
Optimisation avec contrainte



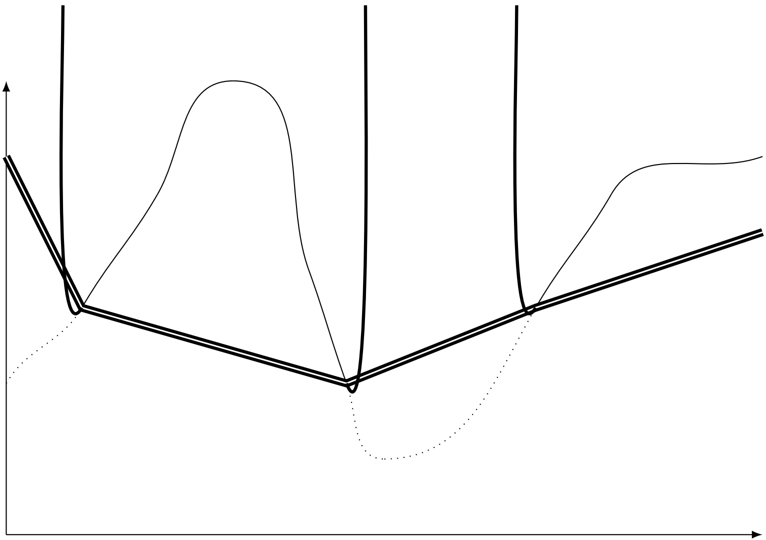
Méthode des pénalités

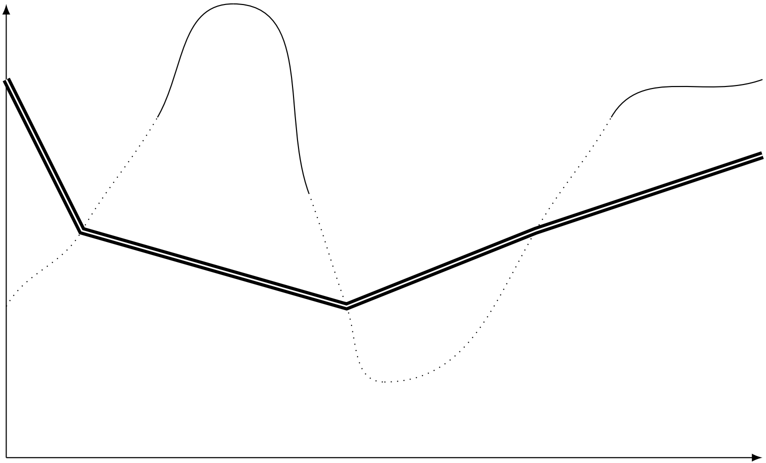


Méthode des pénalités

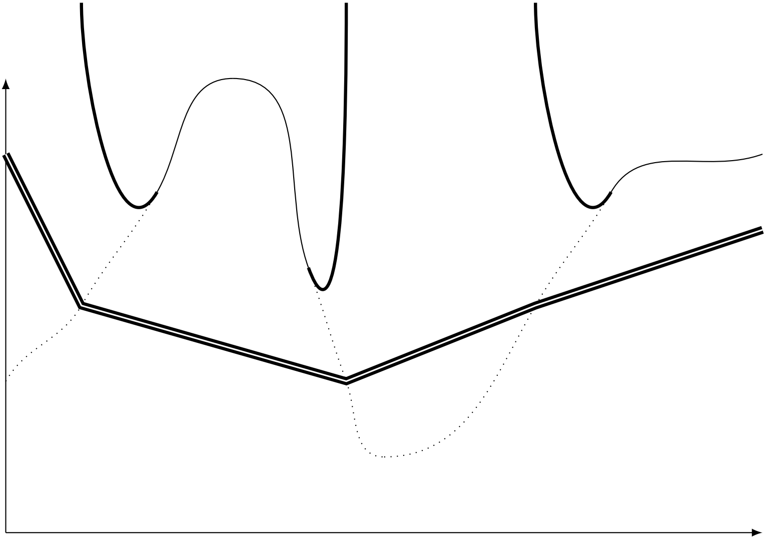


Méthode des pénalités

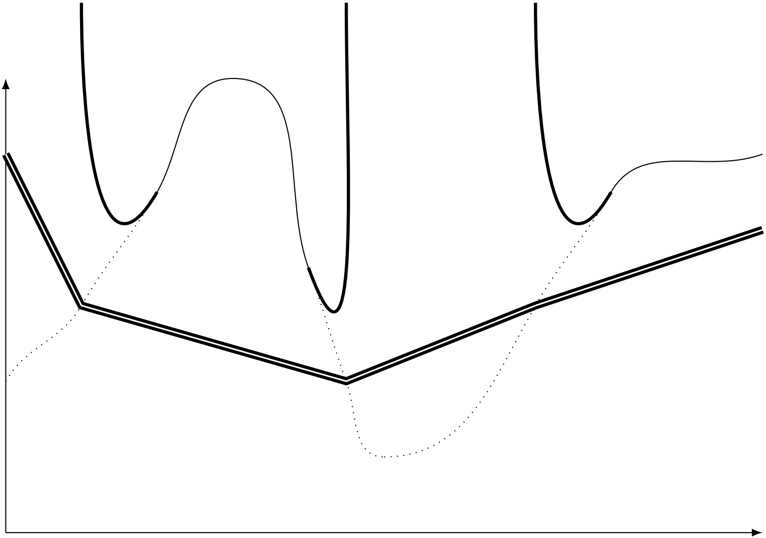


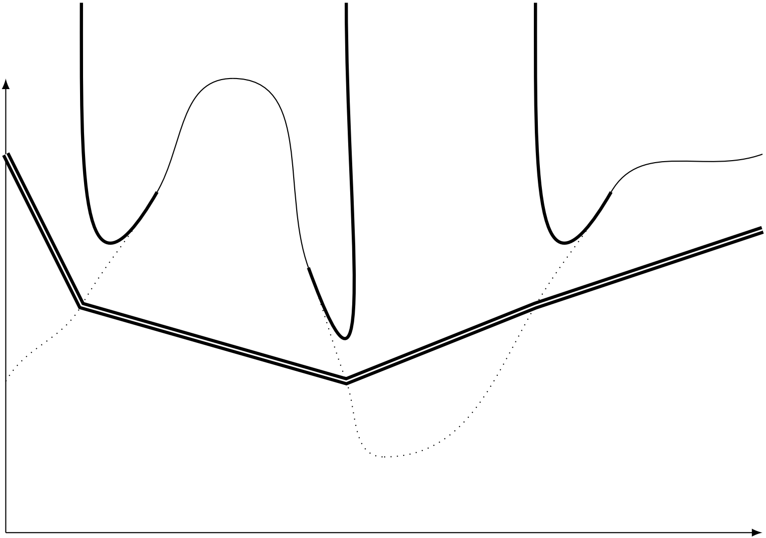


Méthode des barrières



Méthode des barrières





Problème d'optimisation

On veut résoudre

$$\begin{array}{lrr} \min & f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ s.c. & g_i(x) \leq 0 & \forall\ 1 \leq i \leq m \\ & h_j(x) = 0 & \forall\ 1 \leq j \leq p \end{array}$$

On pose

$$S = \{x | g_i(x) \leq 0\ \forall\ 1 \leq i \leq m; h_j(x) = 0\ \forall\ 1 \leq j \leq p\}$$

On veut donc résoudre

$$\min_{x \in S} f(x)$$

Pénalités et barrière

On veut

$$\min_{x \in S} f(x) \text{ et } x^* = \arg\min_{x \in S} f(x)$$

Pénalités

Soit $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- P continue
- $P(x) \geq 0$
- $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in S$

Résoudre
$\lim_{\mu \to +\infty} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu P(x)$

Barrière

Soit $B : \mathring{S} \to \mathbb{R}$

- B continue
- $B(x) \geq 0$
- $B(x) \to +\infty \Leftrightarrow x$ s'approche de $Fr(S)$.

Résoudre $\lim_{\mu \to 0} \min_{x \in \mathring{S}} f(x) + \mu B(x)$

Contrainte : $\mathring{S}$ non vide et tout voisinage de $x^* \in S$ rencontre $\mathring{S}$

Exemples de pénalités et de barrières

Pénalité de Courant-Beltrami

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x))^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j(x)^2$$

Barrière logarithmique

Si $-1 < g_i(x) < 0$ ssi $x \in \mathring{S}$, $B(x) = \sum_{i=1}^{m} -\log(-g_i(x))$

Barrière inverse

Si $g_i(x) < 0$ ssi $x \in \mathring{S}$, $B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{g_i(x)}$

Exemple, méthode des pénalités

On veut résoudre

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1^2 - x_2^2 & x \in \mathbb{R}^2 \\ s.c. \quad & x_1 + x_2 = C & \\ & -x_1 + \frac{1}{4} \leq 0 & \\ & -x_2 + \frac{1}{4} \leq 0 & \end{aligned}$$

Pénalité :

$$P(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - C)^2 + \max(\frac{1}{4} - x_1, 0)^2 + \max(\frac{1}{4} - x_2, 0)^2$$

Exemple, méthode des barrières

On veut résoudre

$$\begin{array}{lcr} \min & x_1^2 + x_2^2 & x \in \mathbb{R}^2 \\ s.c. & -x_1 - 2x_2 \leq -1 & \end{array}$$

Barrière :

$$B(x_1, x_2) = -\log(x_1 + 2x_2 - 1)$$

Convergence de la méthode des pénalités

On pose $q(x, \mu) = f(x) + \mu P(x)$. On suppose que f et continue et admet au moins une solution optimale et que, pour tout $\mu > 0$, $x_\mu = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x, \mu)$ existe.

Théorème

Soit $(\mu_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. Si $(x_{\mu_p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers une solution optimale.

- $q(x_{\mu_p}, \mu_p) \leq q(x_{\mu_{p+1}}, \mu_{p+1})$
- $P(x_{\mu_p}) \geq P(x_{\mu_{p+1}})$
- $f(x_{\mu_p}) \leq f(x_{\mu_{p+1}})$
- $f(x_{\mu_p}) \leq q(x_{\mu_p}, \mu_p) \leq \min f(x)$

Théorème

Si f est coercive, alors $\exists$ une sous-suite de $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge.

Convergence de la méthode des barrières

On pose $q(x, \mu) = f(x) + \mu B(x)$. On suppose que f et continue et admet au moins une solution optimale et que, pour tout $\mu > 0$, $x_\mu = \arg\min_{x \in \mathring{S}} q(x, \mu)$ existe.

Théorème

Soit $(\mu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante vers 0. Si $(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers une solution optimale.

- $q(x_{\mu_p}, \mu_p) \geq q(x_{\mu_{p+1}}, \mu_{p+1})$
- $B(x_{\mu_p}) \leq B(x_{\mu_{p+1}})$
- $f(x_{\mu_p}) \geq f(x_{\mu_{p+1}})$
- $\min f(x) \leq f(x_{\mu_p}) \leq q(x_{\mu_p}, \mu_p)$

Théorème

Si f est coercive, alors $\exists$ une sous-suite de $(x_{\frac{1}{p}})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge.