Chapitre 6 : Programmation linéaire, Algorithme du simplexe

ENSIIE - Module de Recherche Opérationnelle

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Objectif

Résoudre un programme linéaire quelconque de la forme

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{Minimiser} & c \cdot x & & \\ \textbf{s.c.} & A \cdot x & = & b \\ & x & \in & (\mathbb{R}^+)^n \end{array}$$

Forme standard d'un programme linéaire

Théorème

Tout programme linéaire à variables continues peut être réécrit sous la *forme standard* suivante :

$$\begin{array}{llcl} \textbf{Minimiser} & c \cdot x & & \\ \textbf{s.c.} & A \cdot x & = & b \\ & x & \in & (\mathbb{R}^+)^n \end{array}$$

Preuve au tableau

Forme standard d'un programme linéaire : Exemple

$$
\begin{array}{lrcll}
\textbf{Maximiser} & y & & & \\
\quad \textbf{s.c.} & 20x - 50y & \geq & -150 & (1) \\
 & 2x + 3y & \leq & 18 & (2) \\
 & 2x & \geq & 8 & (3) \\
 & y & \leq & 5 & (4) \\
 & x, y & \in & \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Variables d'écart

Toute inéquation

$$\sum a_{ij} \cdot x_i \leq b_j$$

peut être transformée en une égalité en rajoutant une **variable d'écart** $s \geq 0$:

$$\sum (a_{ij} \cdot x_i) + s = b_j$$

.

(Explication graphique au tableau)

Notations

$$\begin{array}{llcl} \textbf{Minimiser} & c \cdot {}^t x & & \\ \textbf{s.c.} & A \cdot {}^t x & = & {}^t b \\ & x & \in & (\mathbb{R}^+)^n \end{array}$$

n : nombre de variables. $n = |x| = |c| =$ nb colonnes de A
m : nombre de contraintes. $m = |b| =$ nb lignes de A
L_i : ligne i de A
C_j : colonne j de A

On suppose $m < n$ et que $rg(A) = m$. Sinon

- contraintes redondantes : on peut supprimer des contraintes.
- ou pas de solution réalisable.

Définition

Une solution est dite *réalisable* si elle satisfait toutes les contraintes d'égalité et que toutes les variables sont positives.

Une *solution optimale* est une solution réalisable minimisant l'objectif.

Soit S l'ensemble des solutions réalisables.

Théorème

S est convexe.

(Preuve au tableau)

Solution de base

Définition

Une **solution de base** est un point x de $(\mathbb{R})^n$ satisfaisant

- $Ax = b$
- $n - m$ coordonnées de x sont nulles
- soit $B = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ les indices des autres coordonnées, alors les colonnes $(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m})$ sont linéairement indépendantes.

B est la base associée à x.

Solution de base : exemple

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{Minimiser} & x & & & \\
\quad \textbf{s.c.} & x + y + s & = & 1 & (1) \\
 & x, y, s & \in & \mathbb{R}^+ &
\end{array}
$$

(Explication graphique au tableau)

Solution de base : notations

Soit x une solution de base où $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ et, pour tout $j \notin B$, $x_j = 0$.

$$B = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \qquad N = [\![1; n]\!] \backslash B$$

$$A^B = (C_i)_{i \in B} \qquad A^N = (C_i)_{i \in N}$$

$$x^B = (x_i)_{i \in B} \qquad x^N = (x_i)_{i \in N} = 0$$

$A \cdot x = A^B \cdot x^B + A^N \cdot x^N = A^B \cdot x^B = b$
A^B est carrée et inversible : $x^B = (A^B)^{-1} \cdot b$.

Remarque : si y n'est pas une solution de base associée à B, alors $y^N \neq 0$ et $y^B = (A^B)^{-1} \cdot b - (A^B)^{-1} \cdot (A^N) \cdot y^N$.

Solution de base réalisable

Définition

Une solution de base est dite *réalisable* ssi toutes ses composantes sont positives.

Autrement dit une solution de base réalisable est une solution de base qui est réalisable.
(Explication graphique au tableau)

Point extrême

Définition

Un *point extrême* de S est un point qui ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire convexe d'autres points de S

Combinaison linéaire convexe : $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot y_i$, $\sum \lambda_i = 1$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

Théorème

L'ensemble des solutions de bases réalisables et des points extrêmes de S sont identiques.

(Preuve au tableau)

Solution de base optimale

Théorème

Si S est borné, tout point de S peut s'exprimer comme combinaison linéaire convexe de points extrêmes.

Théorème

Si S est borné, il existe toujours une solution optimale qui est solution de base réalisable.

(Explication graphique et preuve au tableau)

Solution de base dégénérée

Définition

Une solution de base (x^B, x^N) est dite *dégénérée* si une des composantes de $x^B = 0$.

On dit que le programme est dégénéré si certaines de ses solutions de base réalisables sont dégénérées.
(Explication graphique au tableau)

Coût réduit

Définition

Soit $x = (x^B, x^N)$ une solution de base réalisable associée à B.
Pour tout $j \in N$, le *coût réduit* Δ_j de x est :

$$\Delta_j = c_j - \sum_{i \in B} c_i \cdot \bar{a_{ij}}$$

où $\bar{a_{ij}}$ est la composante (i, j) de la matrice $(A^B)^{-1} \cdot A^N$.

(Intuition graphique au tableau)

Théorème

Si le programme est non dégénéré, une solution de base réalisable (x^B, x^N) vérifiant

$$\Delta_j \geq 0$$

pour tout $j \in N$ est optimale.

(Démonstration à l'aide des conditions de Kuhn-Tucker au tableau.)

Algorithme du simplexe (Version minimisation)

Entrées: Un programme linéaire (P) sous forme standard
Sorties: Une solution optimale de (P)

Trouver une solution de base réalisable $x = (x^B, x^N)$ de (P)
Boucle
    $\bar{A} \leftarrow ((A^B)^{-1} \cdot A^N)$
    $\bar{b} \leftarrow ((A^B)^{-1} \cdot b)$
    $\Delta_j \leftarrow$ Coûts réduits de x
    Si $\forall j, \Delta_j \geq 0$ **Alors**
        Renvoyer x
    $e = \arg\min(\Delta_e | e \in N)$
    $s = \arg\min \left\{ \frac{\bar{b_i}}{\bar{a_{ie}}} | i \in B, \bar{a_{ie}} > 0 \right\}$
    Dans la base B, remplacer s par e
    $x \leftarrow$ La solution de base (réalisable) associée à B

Fonctionne si le programme est non dégénéré et si S est borné.

Comment trouver une solution de départ ?

Pour l'instant,

- au hasard
- on vous l'a donnée
- vous avez déjà lu la fin du cours

Méthode des tableaux

Idée : présenter les calculs différemment afin de les simplifier.
Au programme, vu en TD...

Méthode des 2 phases

La méthode des 2 phases permet de **trouver une solution de base réalisable** d'un programme linéaire (P) quelconque.

Idée : transformer le programme linéaire (P) en un autre (Q) tel que

- (Q) a une solution de base réalisable triviale
- (P) a une solution réalisable ssi les solutions optimales de (Q) ont pour fonction objective 0
- dans ce cas, on peut trouver une solution de base réalisable de (P) à partir d'une solution optimale de (Q)

On veut résoudre ce programme :

$$\begin{array}{llcll} \textbf{Minimiser} & c \cdot {}^t x & & & \\ \textbf{s.c.} & A \cdot {}^t x & = & {}^t b & \quad (P) \\ & x & \in & (\mathbb{R}^+)^n & \end{array}$$

Hypothèse : ${}^t b \geq 0$.
(Si ce n'est pas le cas, il suffit de multiplier toutes les contraintes où $b_i < 0$ par -1)

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{Minimiser} & c \cdot {}^t x & & & \\
\quad \textbf{s.c.} & A \cdot {}^t x & = & {}^t b & \qquad (\mathrm{P}) \\
 & x & \in & (\mathbb{R}^+)^n &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcll}
\textbf{Minimiser} & \sum \varphi_i & & & \\
\quad \textbf{s.c.} & A \cdot {}^t x + {}^t \varphi & = & {}^t b & \qquad (\mathrm{Q}) \\
 & x, \varphi & \in & (\mathbb{R}^+)^n &
\end{array}
$$

(Preuve que (Q) vérifie bien les 3 propriétés énoncées 2 slides plus tôt au tableau)

Entrées: Un programme linéaire sous forme standard (P) où $b \geq 0$
Sorties: Une solution optimale de (P)

1: Transformer (P) en un programme linéaire (Q) comme expliqué précédemment.
2: Résoudre (Q) avec l'algorithme du simplexe ((Q) a une solution de base réalisable triviale à partir de laquelle on peut démarrer)
3: $x^*_Q, \varphi^*_Q \leftarrow$ une solution optimale de (Q)
4: **Si** $\varphi^*_Q \neq 0$ **Alors**
5: (P) n'a pas de solution réalisable, on s'arrête.
6: **Sinon**
7: x^*_Q est une solution de base réalisable de (P)
8: Résoudre (P) avec l'algorithme du simplexe.

Phase 1 : lignes 1 à 3
Phase 2 : lignes 4 à 8