Méthodes des pénalités et des barrières

Recherche opérationnelle
Dimitri Watel - ENSIIE

2024

Les méthodes des pénalités et des barrières sont deux méthodes qui permettent de transformer un problème d'optimisation avec contrainte en une série de problèmes d'optimisation sans contraintes de sorte que résoudre ces problèmes permet de trouver une solution optimale du problème original. On supposera dans la suite qu'on dispose d'une boîte noire capable de résoudre efficacement un problème d'optimisation sans contrainte.

On veut résoudre le problème (O) suivant

$$\begin{array}{llll} (O):\min & f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ s.c. & g_i(x) \leq 0 & \forall\, i \in [\![1;m]\!] \\ & h_j(x) = 0 & \forall\, j \in [\![1;p]\!] \end{array}$$

On note S l'ensemble des solutions réalisables. Ainsi, dit autrement, on veut résoudre le problème suivant:

$$(O): \min_{x \in S} f(x)$$

Dans la suite de ce cours, on supposera que f, g_i et h_j sont $\mathcal{C}^1$. On suppose aussi que ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^n$ tout entier. On peut en déduire que S est fermé. Cette propriété sera utile pour une des méthodes. Ces contraintes peuvent être relâchées tant que cela ne remet pas en cause l'utilisation de la boîte noire pour optimiser les versions sans contraintes de nos problèmes.

1 Principe et définition des méthodes

Le principe des méthodes de pénalité et de barrière est d'intégrer les contraintes dans la fonction objectif de sorte que ne pas respecter ces contraintes donne une valeur de fonction objective élevée. Les deux méthodes ont une approche différente pour faire ça. La méthode des pénalités pénalise les valeurs x en dehors de S. La méthode des barrière empêche x de sortir de S en le pénalisant s'il s'approche du bord.

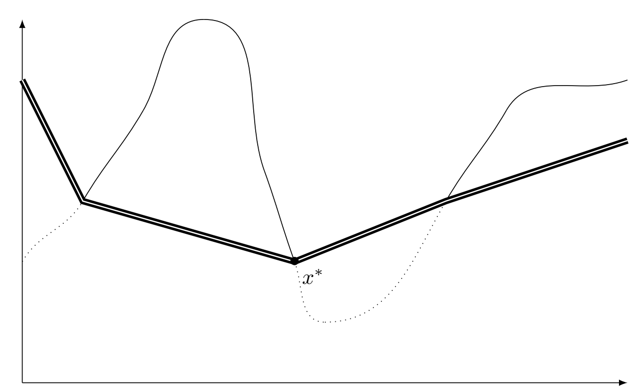
1.1 Méthode des pénalités

Pour cette méthode, on suppose qu'on dispose d'une fonction $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue positive et telle que $P(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$. On résout ensuite le problème P_μ suivant:

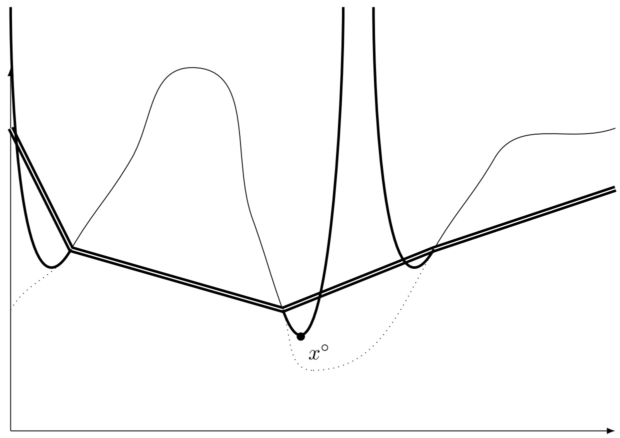
$$(P_\mu): \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu \cdot P(x)$$

Comme on peut le voir, on minimise maintenant une fonction sans contrainte sur $\mathbb{R}^n$. En supposant que μ est assez grand, alors la fonction $\mu P(x)$ va fortement pénaliser toute valeur de x qui n'est pas dans S. Si x est dans S, puisque $P(x) = 0$, alors la fonction f n'est pas affectée et la solution optimale de (P_μ) va naturellement tendre à être une solution optimale de (O) au fur et à mesure qu'on augmente μ. La question compliquée est quelle valeur faut-il donner à μ pour que la pénalité soit suffisante ?

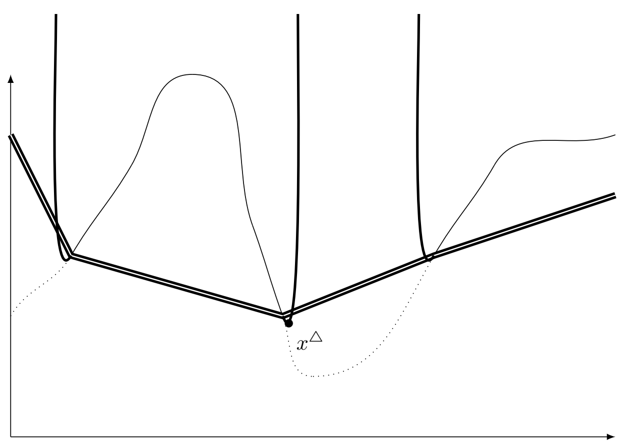
Prenons l'exemple suivant exemple où la contrainte est d'être au dessus de la fonction en double trait. La solution optimale x^* de (O) est indiquée sur le dessin.



On applique une pénalité. On obtient une nouvelle fonction qu'on peut optimiser sans contrainte. On obtient la solution optimale x° ci-dessous. On remarque que cette solution n'est pas dans S. C'est normal, dans le problème sans contrainte, on peut renvoyer une solution hors de S. L'objectif de la pénalité est d'être suffisamment élevée pour l'éviter.



Si on augmente la pénalité, on obtient une nouvelle solution optimale $x^{\triangle}$, plus proche de S. Plus on augmentera la pénalité, plus on va se rapprocher de S jusqu'à converger vers x^*.



Une fonction classique de pénalité est la pénalité de Courant-Beltrami, décrite ci-après. Si les fonctions g_i et h_j sont $\mathcal{C}^1$ alors P est aussi $\mathcal{C}^1$.

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x))^2 + \sum_{j=1}^{p} h_j(x)^2$$

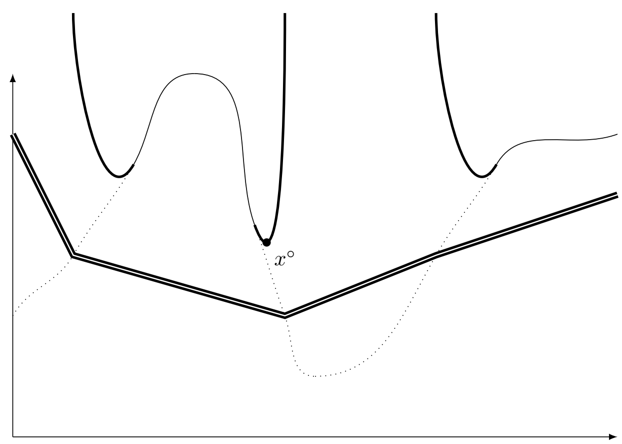
1.2 Méthode des barrières

On note $\mathring{S}$ l'intérieur de S. On suppose $\mathring{S}$ non vide et qu'il existe une solution optimale x^* telle que tout voisinage de x^* rencontre $\mathring{S}$. On suppose qu'on dispose d'une fonction $B : \mathring{S} \to \mathbb{R}$ continue positive et telle que $B(x) \to +\infty$ si x s'approche de la frontière de S. On résout ensuite le problème B_μ suivant:

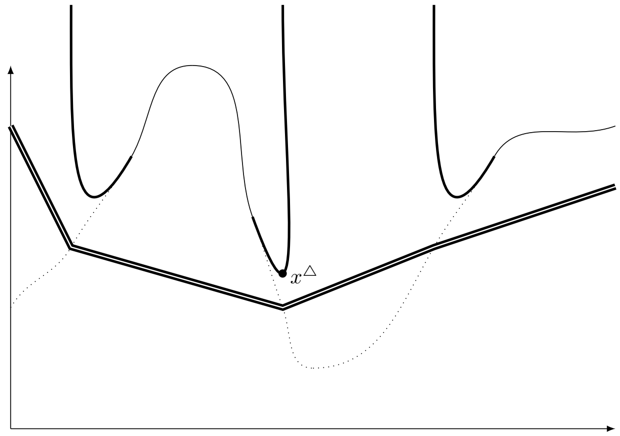
$$(B_\mu) : \min_{x \in \mathring{S}} f(x) + \mu \cdot P(x)$$

On minimise maintenant une fonction sans contrainte sur $\mathring{S}$. Puisque $B(x)$ tend vers l'infini si x s'approche de la frontière de S alors une solution optimale de B_μ ne peut être au bord de S. Ainsi si la solution optimale x^* de (O) est plutôt au centre de S, B_μ permet de le trouver facilement. En supposant que μ est assez petit, alors la fonction $\mu B(x)$ va permettre de trouver x^* même si cette solution est proche du bord. Si x^* est sur le bord lui-même, alors la solution optimale de (B_μ) va naturellement tendre vers x^* au fur et à mesure qu'on diminue μ. La question compliquée est quelle valeur faut-il donner à μ pour que la barrière ne soit pas trop pénalisante ?

Prenons le même exemple que pour la méthode des pénalités, appliquons une barrière. On obtient la nouvelle fonction suivante à optimiser. La solution optimale x° est notée sur le dessin. Comme expliqué précédemment, puisque x^* est sur le bord, la barrière nous empêche de l'atteindre.



Si on diminue μ alors la barrière s'affaisse et la solution optimale se rapproche de x^*.



Voici deux fonctions classiques de barrière, respectivement, la barrière logarithmique et la barrière inverse.

Si $-1 < g_i(x) < 0$ ssi $x \in \mathring{S}$, $B(x) = \sum_{i=1}^{m} -\log(-g_i(x))$

Si $g_i(x) < 0$ ssi $x \in \mathring{S}$, $B(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{-1}{g_i(x)}$

De manière générale, la pénalité est plus simple à mettre en oeuvre. Car l'optimisation se fait alors sur $\mathbb{R}^n$ tout entier alors qu'elle se fait sur $\mathring{S}$ dans le cas de la barrière. De plus les barrière classiques ont des contraintes qui fait qu'il n'est pas toujours possible de les appliquer. Cependant, la barrière dispose d'un avantage qui est que pour chaque valeur de μ, optimiser B_μ produit une solution réalisable du problème (O). Comme on peut le voir sur l'exemple précédent, ce n'est pas le cas de la méthode des pénalités qui peut produire des solutions non réalisables.

2 Propriétés de convergence des méthodes

Les propriétés de convergence sont similaires dans les deux méthodes. On va montrer, dans les deux cas que ces méthodes, si elles convergent, convergent toujours vers une solution optimale de (O). On va ensuite donner un cas de fonction f où on peut garantir cette convergence.

2.1 Méthode des pénalités

Théorème 2.1. *Soit P une fonction de pénalité. On suppose que f est continue et que (O) admets une solution optimale x^*. On suppose aussi que, pour tout $\mu > 0$, (P_μ) admets une solution optimale x_μ. Soit $(\mu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{p\to+\infty} \mu_p = +\infty$. Si $(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers une solution optimale de (O).*

Proof. On pose $q(x,\mu) = f(x) + \mu P(x)$. Soit $x_\infty = \lim_{p\to+\infty} x_{\mu_p}$. Puisque la suite $(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x_∞ et puisque f est continue sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\lim_{p\to+\infty} f(x_{\mu_p}) = f(x_\infty) \tag{1}$$

On va montrer que $f(x_\infty) \le f(x^*)$ et que x_∞ est réalisable.

Puisque $x_\mu = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} q(x,\mu)$

$$q(x_{\mu_p}, \mu_p) \le q(x^*, \mu_p)$$

Or $x^* \in S$, donc $P(x^*) = 0$

$$\begin{aligned} q(x_{\mu_p}, \mu_p) &\le f(x^*) \\ f(x_{\mu_p}) + \mu_p \cdot P(x_{\mu_p}) &\le f(x^*) \\ P(x_{\mu_p}) &\le \frac{f(x^*) - f(x_{\mu_p})}{\mu_p} \end{aligned} \tag{2}$$

Or $\lim_{p\to+\infty} \mu_p = +\infty$ et à l'aide de (1)

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{f(x^*) - f(x_{\mu_p})}{\mu_p} = 0$$

Puisque la fonction P est positive, alors la suite $P(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est comprise entre deux suites convergent vers 0. Donc cette suite converge aussi vers 0. Puisque P est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors

$$\lim_{p\to+\infty} P(x_{\mu_p}) = P(x_\infty) = 0$$

Donc $x_\infty \in S$. Puisque $P(x_{\mu_p})$ et μ_p sont positifs et par (2)

$$f(x_{\mu_p}) \le f(x^*) \tag{3}$$

Donc par continuité de f

$$f(x_\infty) \le f(x^*) \tag{4}$$

(5)

Donc x_∞ est une solution optimale de (O).

□

On donne ci-après un cas où la convergence est assurée. On rappelle qu'une fonction coercive est une fonction quelle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème 2.2. *Si f est coercive et si (O) admets une solution optimale x^*, alors, pour tout μ, (P_μ) admets une solution optimale x_μ et il existe une sous-suite de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge.*

Proof. On pose $q(x,\mu) = f(x) + \mu P(x)$. Si f est coercive, puisque $q(x, \mu \ge f(x))$ alors q est aussi une fonction coercive vis-à-vis de x, pour tout μ fixé. Or toute fonction coercive continue possède un minimum global, donc (P_μ) admets une solution optimale x_μ.

De plus, du fait de la coercivité, la norme de x_μ est bornée. En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on obtient le résultat souhaité. □

2.2 Méthode des barrières

Théorème 2.3. *Soit B une fonction de barrière. On suppose que f est continue et que (O) admets une solution optimale x^*. On suppose aussi que, pour tout $\mu > 0$, (B_μ) admets une solution optimale x_μ. Soit $(\mu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante vers 0. Si $(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors elle converge vers une solution optimale de (O).*

Proof. On pose $q(x,\mu) = f(x) + \mu B(x)$. Soit $x_0 = \lim\limits_{p\to+\infty} x_{\mu_p}$. Puisque la suite $(x_{\mu_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 et puisque f est continue sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\lim_{p\to+\infty} f(x_{\mu_p}) = f(x_0) \tag{6}$$

Etant donné que la méthode des barrières optimise sur $\mathring{S}$, on a $x_{\mu_p} \in \mathring{S}$. On rappelle que S est fermé donc $x_0 \in S$. Il reste donc à démontrer que $f(x_0) = f(x^*)$.

Montrons dans un premier temps qu'il existe une limite à $(q(x_{\mu_p},\mu_p))_{p\in\mathbb{N}}$ quand p tend vers l'infini. Pour cela, montrons que cette suite est bornée et décroissante.

$$\begin{aligned} q(x_{\mu_p},\mu_p) &= f(x_{\mu_p}) + \mu_p B(x_{\mu_p}) \\ &\geq f(x^*) + \mu_p B(x_{\mu_p}) \geq f(x^*) \end{aligned} \tag{7}$$

Elle est donc bien bornée, montrons qu'elle est décroissante.

$$q(x_{\mu_p},\mu_p) = f(x_{\mu_p}) + \mu_p B(x_{\mu_p})$$

Puisque $(\mu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$\geq f(x_{\mu_p}) + \mu_{p+1} B(x_{\mu_p}) = q(x_{\mu_p},\mu_{p+1})$$

Puisque $x_{\mu_{p+1}} = \arg\min\limits_{x\in\mathring{S}} q(x,\mu_{p+1})$

$$\geq q(x_{\mu_{p+1}},\mu_{p+1}) \tag{8}$$

Par (7) et (8), il existe une limite Q à la suite $(q(x_{\mu_p},\mu_p))_{p\in\mathbb{N}}$. Soit maintenant $x \in \mathring{S}$

$$q(x_{\mu_p},\mu_p) \leq f(x) + \mu_p B(x)$$

Puisque $(\mu_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.

$$Q \leq f(x) \tag{9}$$

Puisque f est continue sur $\mathbb{R}^n$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une voisinage V de x^* tel que, pour tout $x \in V$, $f(x) \leq f(x^*) + \varepsilon$. Au début de la présentation de la méthode, dans la section 1.2, on a fait l'hypothèse que tout voisinage de x^* intersecte $\mathring{S}$. Donc il existe $x \in \mathring{S}$ tel que $f(x) \leq f(x^*) + \varepsilon$. D'après (7) et (9), on en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &f(x^*) \leq Q \leq f(x^*) + \varepsilon \\ &f(x^*) = Q \end{aligned}$$

Pour terminer

$$\mu_p B(x_{\mu_p}) = q(x_{\mu_p},\mu_p) - f(x_{\mu_p})$$

D'après 6

$$\lim_{p\to+\infty} \mu_p B(x_{\mu_p}) = Q - f(x_0) = f(x^*) - f(x_0)$$

Or $\mu_p B(x_{\mu_p}) \geq 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ donc

$$f(x^*) - f(x_0) \geq 0$$

Donc x_0 est solution optimale de (O).

□

Remarque 1. On peut noter que la continuité de B n'est pas nécessaire pour cette démonstration. Mais elle reste nécessaire pour utiliser facilement des algorithmes d'optimisation sans contrainte.

Théorème 2.4. *Si f est coercive, alors $\exists$ une sous-suite de $(x_{\frac{1}{p}})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge.*

Proof. La preuve est identique à celle du théorème 2. □