Chapitre 8 : Files d'attente

ENSIIE - Module de Recherche Opérationnelle

Dimitri Watel (dimitri.watel@ensiie.fr)

2022

Processus de Poisson

- Etats $S = \mathbb{N}$
- Temps $T = \mathbb{R}^+$

À chaque instant, un évènement peut se produire, $X(t) =$nb évènements produits entre 0 et t.

Processus de Poisson

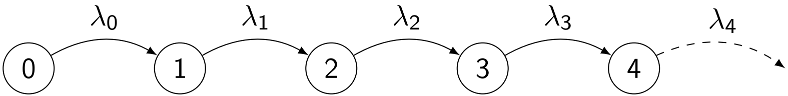
La probabilité qu'un évènement se produise entre t et $t + dt$ est $\lambda \cdot dt + o(dt)$.

$$Pr(X(t + dt) - X(t) = 1 | X(t) = n) = \lambda_n \cdot dt + o(dt)$$

$$Pr(X(t + dt) - X(t) = 0 | X(t) = n) = 1 - \lambda_n \cdot dt + o(dt)$$

$$(Pr(X(t + dt) - X(t) > 1 | X(t) = n) = o(dt))$$

Représentation graphique



λ_n est le *taux d'arrivée* ou *taux de naissance* : nombre d'arrivées par unité de temps quand $X(t) = n$.

Probabilité $P_n(t)$

On note $P_n(t)$ la probabilité que n évènements se produisent entre 0 et t.

Théorème

- $P_n'(t) = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - \lambda_n P_n(t)$
- $P_0(0) = 1$
- $P_n(0) = 0$ si $n > 0$
- Si $\forall n,\ \lambda_n = \lambda,\ P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}$

(Preuve au tableau)

Définition

Une file d'attente mélange deux processus de Poissons : un où les évènements naissent (processus de naissance) et un autre où les évènements meurent (processus de mort).

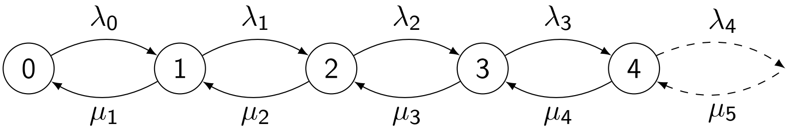
$$Pr(X(t+dt) - X(t) = 1 | X(t) = n) = \lambda_n \cdot dt + o(dt)$$

$$Pr(X(t+dt) - X(t) = -1 | X(t) = n) = \mu_n \cdot dt + o(dt)$$

$$Pr(X(t+dt) - X(t) = 0 | X(t) = n) = 1 - (\lambda_n + \mu_n) \cdot dt + o(dt)$$

$$(|Pr(X(t+dt) - X(t)| > 1 | X(t) = n) = o(dt))$$

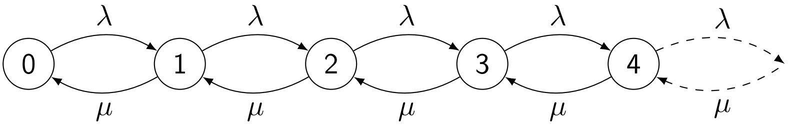
Représentation graphique



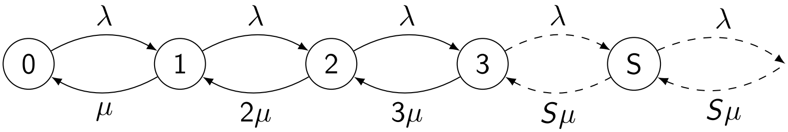
λ_n est le *taux de naissance* : nombre d'arrivées par unité de temps quand $X(t) = n$.

μ_n est le *taux de mort* : nombre de départs par unité de temps quand $X(t) = n$.

Entrée constante, Sortie constante, 1 guichet



Entrée constante, Sortie constante, S guichets



Chaque guichet ouvert augmente le taux de mort d'un facteur μ.

On note $P_n(t)$ la probabilité que $X(t) = n$.

Théorème

- $P'_n(t) = \lambda_{n-1} \cdot P_{n-1}(t) + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1}(t) - (\mu_n + \lambda_n) \cdot P_n(t)$
- $P_0(0) = 1$
- $P_n(0) = 0, n > 0$

Régime permanent

Le régime permanent, s'il existe, est défini par l'indépendance des $P_n(t)$ vis-à-vis de t :

- $\forall n, t \quad P_n(t) = P_n$
- $\forall n, t \quad P'_n(t) = 0$

Théorème

$$P_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdots \mu_n} \cdot P_0$$

Utiliser $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ pour déduire P_0 et toutes les autres probabilités.

(preuves au tableau)

Condition nécessaire et suffisante du régime permanent

Théorème

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n}$ converge si et seulement s'il existe un régime permanent.

Corrolaire

Si, à partir d'un certain rang, $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$, et $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors il existe un régime permanent.

Taille de la file

- Nombre de personnes dans la file (ainsi qu'aux guichets) : $L = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot P_n(t)$
- Nombre de personnes dans la file, mais pas devant un guichet, s'il y a m guichets : $L' = \sum_{n=m}^{+\infty} (n - m) \cdot P_n(t)$

Entrée constante, Sortie constante, 1 guichet

On suppose $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$.

Théorème

- Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors il existe un régime permanent.
- $P_0 = (1 - \frac{\lambda}{\mu})$ et $P_n = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n$
- $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
- $L' = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

(Preuves au tableau)

Entrée constante, Sortie constante, S guichets

On suppose $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \min(n, S) \cdot \mu$.

Théorème

- Si $\frac{\lambda}{S\mu} < 1$, alors il existe un régime permanent.
- $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!\left(1-\frac{\lambda}{S\mu}\right)}}$ et $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{S!} \frac{1}{S^{n-S}} P_0$
- $L = \left(\frac{1}{1+\left(1-\frac{\lambda}{S\mu}\right)\left(\frac{S!}{(\lambda/\mu)^S}\right) \sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}} \right) \frac{\frac{\lambda}{S\mu}}{1-\frac{\lambda}{S\mu}} + \frac{\lambda}{\mu}$
- $L' = P_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^S \frac{1}{S!} \frac{\lambda}{S\mu} \left(\frac{1}{1-(\lambda/(S\mu))}\right)^2$

(Preuves au tableau)