Set Cover

Comment couvrir les 12 éléments avec le moins d'ensembles possibles parmi A, B, C, ..., G?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	X				X		X		X		X	
B		X		X	X			X			X	
C		X			X					X		X
D				X	X	X			X			X
E	X		X	X		X	X			X	X	
F	X		X									
G		X	X	X	X			X	X			

On utilise un algo de Branch and Bound : à chaque niveau de l'arbre correspond un ensemble, qu'on décide d'utiliser ou non pour couvrir les éléments.

- On utilise la borne suivante :
si j'ai k éléments à couvrir avec des ensembles de taille au plus p, il me faut au moins $\left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$ ensembles pour tout couvrir.
Donc si j'ai utilisé q ensembles pour couvrir n - k éléments, et que, parmi les ensembles restant, le plus grand couvre au plus p éléments parmi les k qui n'ont pas été couverts, je sais que ma solution sera de taille au moins

$$q + \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil$$

- On explore en profondeur à gauche
- La borne est notée en vert
- C'est une borne inférieure puisqu'on a un problème de minimisation
- Si la borne est plus élevée que la meilleure solution (par exemple noeud A B C), alors on barre le noeud en vert
- Parfois la borne n'est pas notée et le noeud est barré (par exemple pour le noeud A B C) ;
 c'est parce que le père du noeud a une borne égale à la meilleure solution et qu'on ne trouvera pas mieux au niveau du fils droit, sa borne est donc supérieure à celle du père, donc à la meilleure solution.
- Si la solution n'est pas réalisable, par exemple le noeud A B C D, on barre le noeud en rouge
- Sinon on l'explore et on calcule ses fils s'il en a, ou on calcule la valeur de la solution si c'est une feuille.
L'ordre des noeuds explorés est noté en bleu. Ici on explore 17 noeuds