TD 2 : Chemins optimaux dans les graphes

Recherche opérationnelle S3.

2022

Exercice 1 — *Table de routage d'un réseau*

Dans un réseau à commutation de paquets, on peut disposer d'une table qui indique, en chaque noeud, le canal vers lequel un paquet qui arrive doit être acheminé, connaissant la destination de ce paquet. Etant donné un réseau, on va s'intéresser à l'élaboration d'une table des routages optimaux.

Soit le réseau de 4 noeuds décrit par un graphe orienté dont la matrice d'adjacence est la suivante :

	1	**2**	**3**	**4**
1	-	3	-	3
2	2	-	2	2
3	1	-	-	1
4	-	4	4	-

1. Rappeler le nom de deux algorihtmes que l'on peut utiliser pour calculer le plus court chemin du sommet **1** vers tous les autres.
2. En fait on a besoin d'avoir les chemins optimaux entre chaque paire de sommets. Appliquer l'algorithme de Floyd-Warshall pour ce faire. Expliciter les matrices π et P à chaque étape de l'algorithme.
3. Déduire de P la table T de routage optimal dans le réseau. C'est à dire, pour tout couple (u, v) le successeur de u dans un plus court chemin de u à v.

Algorithme 1 Floyd-warshall ($G = (X, U)$)

$\pi_{ij}^{(0)}$:= valeur de l'arc (i, j)
// si l'arc (i, j) n'existe pas on met $+\infty$, et si $i = j$ on met 0

$P^{(0)}(i, j) := i$ //à la fin de l'algorithme $P^{(n)}(i, j)$ contient le prédecesseur de j dans un chemin optimal de i vers j

Pour $m = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
  Pour $i = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
    Pour $j = 1, 2, \ldots, n$ **Faire**
      // Est-il plus court d'aller de i à j en passant par m ?
      Si $(\pi_{im}^{(m-1)} + \pi_{mj}^{(m-1)} < \pi_{ij}^{(m-1)})$ **Alors**
        $\pi_{ij}^{(m)} := \pi_{im}^{(m-1)} + \pi_{mj}^{(m-1)}$
        $P_{ij}^{(m)} := P_{mj}^{(m-1)}$
      Sinon
        $\pi_{ij}^{(m)} := \pi_{ij}^{(m-1)}$
        $P_{ij}^{(m)} := P_{ij}^{(m-1)}$

Exercice 2 — *Conditions d'optimalité*

1. Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté avec un sommet s et dont les arcs (u, v) ont des valeurs $\omega(u, v) \in \mathbb{R}$. On associe chaque sommet u à un nombre d_u. Démontrer le théorème suivant : Le graphe ne possède pas de circuit absorbant si et seulement si le système $d_v - d_u \leq \omega(u, v)$ pour tout arc (u, v) de U possède une solution. Dans ce cas, poser d_u un plus court chemin de s à u est une solution du système.
2. Résoudre le système suivant en le ramenant à un problème de chemin dans un graphe :

$$
\begin{aligned}
x_3 - x_4 &\leq 5 \\
x_4 - x_1 &\leq -10 \\
x_1 - x_3 &\leq 8 \\
x_2 - x_1 &\leq -11 \\
x_3 - x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$

3. Même question pour le système :

$$
\begin{aligned}
x_3 - x_2 &\leq 5 \\
x_4 - x_3 &\leq -2 \\
x_4 - x_2 &\leq 4 \\
x_1 - x_2 &\leq 3 \\
x_5 - x_1 &\leq 2 \\
x_3 - x_5 &\leq 7 \\
x_5 - x_4 &\leq -1
\end{aligned}
$$

Exercice 3 — *Coupes disjointes et plus court chemins*

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté sur les arcs. Soient x et y deux nœuds du graphe. On appelle une coupe séparant x et y un sous-ensemble d'arcs de A tel que retirer ces arcs de G supprime tout chemin de x vers y.

1. Montrer que, après suppression d'une coupe C séparant x et y, V est coupé en deux ensembles X et $Y = V \backslash X$ tels que tout arc de G reliant X à Y appartient à C.
2. Montrer que le nombre maximum de coupes disjointes séparant x et y est égal au nombre d'arcs dans un plus court chemin de x vers y.

Exercice 4 — *Conversion de monnaie*

Soit G un graphe dont les nœuds représentent une monnaie et chaque arc (u, v) , s'il existe, représente une conversion possible d'une monnaie u vers une monnaie v. Dans ce cas l'arc est valué avec le taux de la conversion.

Sous quelle condition peut-on devenir infiniment riche ? Transformer ce graphe en un graphe H de sorte que chercher un plus court chemin dans H permette de savoir s'il est possible de devenir infiniment riche. L'algorithme de Dijkstra peut-il nous aider ?