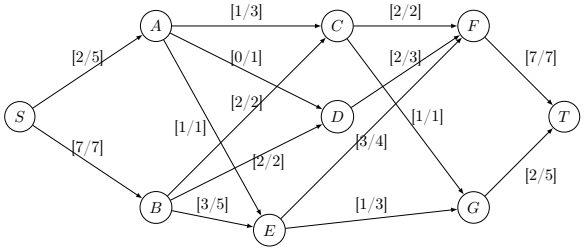
TD 4 : Problème de flot maximum et de coupe minimum

Recherche opérationnelle S3.

2024

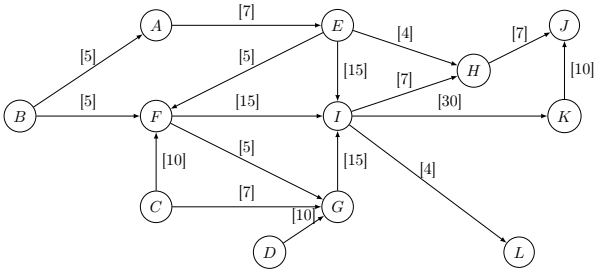
Exercice 1 — *Algorithme de Ford-Fulkerson*

1. Déterminer un flot de valeur maximale dans le graphe suivant avec l'algorithme de Ford Fulkerson. Un flot initial vous est donné. Utilisez l'algorithme de marquage. Refaites ensuite une des itérations avec la méthode du réseau résiduel.
2. Donner la coupe minimale associée.
3. Si on souhaite augmenter le flot maximum de ce graphe de 1, de quels arcs doit-on augmenter la capacité ? Donner un contre-exemple de graphe où ce n'est pas suffisant. Décrire un algorithme, qui change une ou plusieurs capacités de sorte que le flot max augmente de exactement 1.



Exercice 2 — *Adduction d'eau*

Trois villes J, K et L sont alimentées en eau grâce à 4 réserves A, B, C et D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement ...). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, de 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution d'eau est schématisé par le graphe ci-dessous, les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3 par jour :



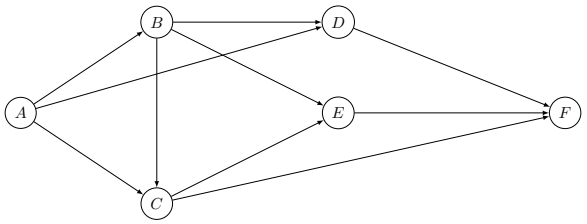
1. Déterminer combien de m^3 d'eau peut arriver aux villes en le transformant en problème de flot maximum et donner la coupe minimale correspondante. Utilisez l'algorithme de Ford Fulkerson avec l'algorithme de marquage. Refaites ensuite une des itérations avec la méthode du réseau résiduel.
2. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante. Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables,

à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20, et pour la ville L : 15. Aussi le conseil communal décide de refaire les canalisations (A,E) et (I,L).

Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

Exercice 3 — *Recherche de chemins disjoints dans un graphe*

Soit le graphe G suivant :



Quel est dans ce graphe le nombre maximal de chemins de A à F que l'on peut trouver, disjoints au sens des sommets ? (Trois chemins sont nœuds disjoints s'ils n'ont aucun nœud en commun.) Pour répondre à cette question, on associera à G un nouveau graphe G' dans lequel on cherchera un flot maximal.

Exercice 4 — *Couplage maximum*

On rappelle qu'un graphe biparti est un graphe où les nœuds sont partitionnés en deux stables (nœuds sans arêtes). Un couplage est un ensemble d'arêtes qui ne se touchent pas. Montrer que le problème du couplage maximal dans un graphe biparti peut être vu comme un problème de flot maximal dans un réseau de transport à préciser. On expliquera comment le flot permet de retrouver le couplage.

Exercice 5 — *Repas de mariage*

On doit organiser un repas de mariage. Pour augmenter l'interaction sociale, les mariés voudraient que deux membres d'un même groupe d'amis/famille ne soient pas placés dans la même table. Formuler ce problème comme le calcul d'un flot maximal dans un réseau de transport à préciser.

On considère qu'il y a p groupes/familles. Le $i$ème groupe comprend $a(i)$ membres. Il y a q tables. La capacité de la $j$ème table est $b(j)$.

Exercice 6 — *Choix d'expériences scientifiques*

On souhaite choisir des expériences scientifiques parmi n expériences $E_1, ..., E_n$ qui doivent être réalisées dans l'espace. Les expériences nécessitent des instruments parmi p instruments disponibles $I_1, ..., I_p$. Un instrument emporté peut servir à plusieurs expériences. La réalisation de l'expérience E_i rapporte p_i euros mais le transport de l'instrument I_j coûte c_j euros. L'objectif est de maximiser le bénéfice.

Pour résoudre ce problème, on le modélise par la recherche d'une coupe de capacité minimale dans le réseau de transport suivant : Les sommets sont $E_1, ..., E_n$ et $I_1, ..., I_p$, une source s et un puits t. Un arc de capacité p_i va de s à E_i et un arc de capacité c_j va de I_j à t. Si E_i utilise I_j alors un arc de capacité infinie va de E_i à I_j.

1. Dessiner le réseau associé aux expériences suivantes et en trouver une coupe de capacité minimum.

	p_i	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
c_j		2	1	5	3	1	7
E_1	3	x	x	x			
E_2	7	x			x	x	
E_3	7			x			x
E_4	2		x		x	x	x

2. Montrer qu'on peut associer une solution admissible du problème à toute coupe de capacité finie. Quelle relation existe entre la capacité d'une coupe et le bénéfice de la solution associée ?
3. En déduire une façon de résoudre l'exemple de la question 1