TD 6 : Algorithme du gradient Projeté

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — *Un exemple simple.*

Soit (P) le problème suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement le problème.
2. Vérifier que tout x réalisable de (P) (i.e. satisfaisant les contraintes) vérifie la qualification de l'indépendance linéaire. En déduire que seules la ou les solutions optimales vérifient les conditions de Karush Kuhn-Tucker.
3. Appliquer l'algorithme à partir de $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (3 itérations).
4. Vérifier que le point trouvé satisfait les conditions de Karush Khun-Tucker.

Exercice 2 — *Avec des égalités*

Soit (P) le problème suivant :

$$\max_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = x_1 \cdot x_2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 & (1) \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 & (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Mêmes questions que pour l'exercice 1. Pour l'excution de l'algorithme, on partira du point $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Exercice 3 — *Opérateur de projection.*

Connaissant un vecteur g de $\mathbb{R}^n$, on souhaite minimiser $\frac{1}{2}\|g - p\|^2$ pour tout vecteur p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Ap = 0$, sachant que A est une matrice $m \times n$ de rang $m < n$.

Autrement dit, on souhaite trouver le projeté de g sur l'espace $\{p \backslash Ap = 0\}$.

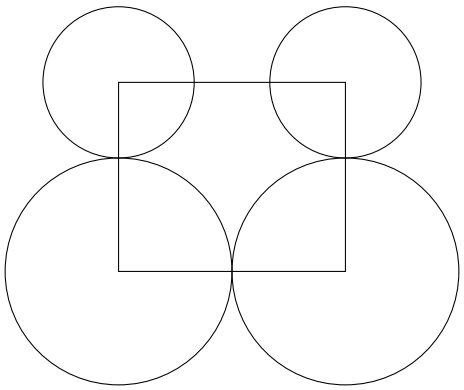
1. Écrire et résoudre les conditions de Kuhn-Tucker pour ce problème.
2. Retrouver, par ce biais, la formule de l'opérateur de projection sur l'espace $L = \{p \backslash Ap = 0\}$.

Exercice 4 — *Problème non convexe*

On considère le problème suivant :

Soient un rectangle de côté 10×12 ; on souhaite placer 4 disques, centrés en les 4 sommets du rectangle dont l'aire est **maximum** tels que les intérieurs des disques ne s'intersectent pas ; autrement dit, les disques peuvent uniquement se toucher sur leur frontière.

Par exemple, le dessin suivant indique une solution réalisable maximale :



1. Modéliser ce problème sous forme d'un problème de programmation mathématique. On posera $\gamma = \sqrt{244} \simeq 15.62$.
2. Montrer que, si on applique le gradient projeté en partant du point où tous les rayons sont nuls, l'algorithme s'arrête à la première itération.
3. Montrer que, si on applique le gradient projeté en partant du point donné sur la figure (en supposant que les rayons des 2 cercles du bas sont égaux), l'algorithme s'arrête à la première itération.
4. Montrer que ces solutions ne sont pas optimales.

Exercice 5 — *Projection et forme standard*

Soit les programmes suivants :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer qu'ils sont équivalents, dans le sens où ils ont même valeur optimale et où toute solution optimale de l'un peut se déduire d'une solution optimale de l'autre.
2. Représenter graphiquement, sur le même dessin, ces deux programmes.
3. Montrer que si on applique une itération du gradient projeté sur le premier programme, depuis le point $x = (3, 2)$, la direction suivie est $(-6, -4)$.
4. Montrer que si on applique une itération du gradient projeté sur le second programme, depuis le point $x = (3, 2, 3)$, la direction suivie est $(-8/3, -2/3, -10/3)$ et le point atteint $(0.6, 1.4, 0)$.
5. Comment expliquer que les programmes, bien qu'équivalents, ne suivent pas la même direction sur le dessin ?