TD 6 : Programmation Linéaire

Recherche opérationnelle S3.

2022

Exercice 1 — *Composition d'aliments pour le bétail*

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts : orge, arachide, sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et 3.6% de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientèle. On a indiqué ci-dessous les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts :

Produit brut	1. Orge	2. Arachides	3. Sésame	Pourcentage requis
Pourcentage de protéines	12 %	52 %	42 %	22 %
Pourcentage de graisses	2 %	2 %	10 %	3.6 %
Coût par tonne	25	35	30	

1. On notera x_j $(j = 1, 2, 3)$ la fraction de tonne de produit brut j contenu dans une tonne d'aliment. Formuler le problème avec un programme linéaire. Montrer qu'il est possible de réduire la dimension du problème en n'utilisant que 2 variables au lieu de 3.
2. Résoudre ce programme graphiquement.
3. Quel est l'ensemble des solutions de base, indiquez les sur le dessin. Pour chacune, précisez s'il s'agit d'une solution de base réalisable ou non réalisable.
4. Graphiquement, par quelles solutions de base réalisables l'algorithme du simplexe passerait s'il commençait à la solution où $x_1 = 0, x_2 = 0.8$ et $x_3 = 0.2$?
5. Adaptez la résolution graphique au cas suivant : aucune balance n'est à disposition, et les arachides/orges/sésames ne se vendent que par paquet de 100Kg.

Exercice 2 — *Problème de production*

1. Une usine fabrique deux produits liquides P_1 et P_2.
   Chaque litre de ces produits demande des heures de fabrication sur les machines A, B, C, D, E et F, comme indiqué dans le tableau suivant. Chaque machine n'est disponible qu'un certain nombre d'heures dans la semaine.

	A	B	C	D	E	F
P_1	0	1.5	4	5	3	3
P_2	3	2	3	2	4	0
Disponibilité	30	30	60	50	60	60

   Chaque litre du produit P_1 rapporte 1600 euros et chaque litre du produit P_2 rapporte 3200 euros.
2. Ecrire le programme linéaire correspondant avec x_1 et x_2 la quantité, en litre, de produits P_1 et P_2 fabriqués.

3. Deux contraintes sont équivalentes, lesquelles ? Supprimez l'une des deux.
4. Entammer la résolution graphique jusqu'à l'étape de tracé des contraintes. Certaines contraintes sont redondantes, lesquelles ? Supprimez les.
5. Finir la résolution graphique.
6. Quel est l'ensemble des solutions de base, indiquez les sur le dessin. Pour chacune, précisez s'il s'agit d'une solution de base réalisable ou non réalisable.
7. Graphiquement, par quelles solutions de base réalisables l'algorithme du simplexe passerait s'il commençait à la solution où $x_1 = x_2 = 0$?
8. Pour des raisons de stockage, il n'est possible de produire P_1 et P_2 que litre par litre. Adaptez la résolution graphique.

Exercice 3 — ***Modélisation complexe***

Modélisez les problèmes suivants à l'aide d'un programme linéaire :

- Problème de stable de poids maximum dans un graphe non orienté
- Problème de flot maximum
- Problème de plus court chemin
- Problème de coloration

Exercice 4

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Max & z & = x + y \\ s.c. & 2x + 3y & \leq 6 \\ & -x + y & \geq -3 \\ & y & \leq 2 \\ & 3x + 2y & \geq -6 \\ & -2x + y & \leq 4 \\ & x, y & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Représentez et résolvez (P) graphiquement.
2. Ecrire (P) sous forme standard. On créera pour cela 5 variables d'écart s_1, s_2, s_3, s_4 et s_5 et 4 variables de signes x^-, x^+, y^-, y^+.
3. Montrer que $x^- = x^+ = y^- = y^+ = 0$ implique une solution de base réalisable de (P). Quelle est la matrice de base A^B, et quelle est la matrice A^N associée ? Cette base est-elle dégénérée ?
4. Montrer que $x^- = 0, x^+ = 3, y^- = y^+ = 0$ implique une solution de base réalisable de (P). Quelle est la matrice de base A^B, et quelle est la matrice A^N associée ? Cette base est-elle dégénérée ?
5. Montrer que $x^- = 0, x^+ = 5, y^- = 0, y^+ = 2$ implique une solution de base non réalisable de (P). Quelle est la matrice de base A^B, et quelle est la matrice A^N associée ? Cette base est-elle dégénérée ?
6. Montrer que $x^- = 1, x^+ = 0, y^- = 0, y^+ = 0$ n'implique pas une solution de base réalisable de (P) mais qu'elle implique tout de même une solution réalisable.
7. Comment trouver la solution de base associée aux variables x^-, y^-, y^+, s_2 et s_3 ? Quelles sont les matrices associées ?

Exercice 5 — ***Algorithme du simplexe***

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\begin{cases} Max & z & = x + y \\ s.c. & y & \leq 1 + x \\ & y & \geq -1 + x \\ & x + 2y & \leq 2 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$

1. Représentez et résolvez (P) graphiquement.
2. Ecrire le programme sous forme standard, en introduisant 3 variables d'écart.
3. Montrer que $x = y = 0$ implique une solution de base réalisable.
4. Résoudre ce programme avec l'algorithme du simplexe en partant de $(0, 0)$ en vous aidant du dessin.
5. On supprime la 3e contrainte. En vous aidant de la représentation graphique, montrer que l'algorithme du simplexe va effectuer exactement la même première itération. Résoudre ce nouveau programme avec l'algorithme du simplexe, sans refaire la première itération.
6. Au lieu de la supprimer, on modifie la 3e contrainte et on la remplace par $x + y \leq 2$. Vérifiez encore une fois sur le dessin que l'algorithme du simplexe va effectuer la même première itération. Résoudre ce nouveau programme avec l'algorithme du simplexe.
7. On supprime toujours la 3e contrainte, mais on rajoute les 2 contraintes suivantes : $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Montrez que le programme est dégénéré. Vérifiez si l'algorithme du simplexe, tel que vous le connaissez, fonctionne toujours après la première itération.

Exercice 6 — *Méthode des 2 phases*

Soit le programme linéaire suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} Max & z & = x + y \\ s.c. & x + y & \geq 1 \\ & y & \leq 1 \\ & x & \leq 1 \\ & x, y & \geq 0 \end{array}\right.$$

1. Représentez et résolvez (P) graphiquement.
2. Ecrire le programme sous forme standard, en introduisant 3 variables d'écart.
3. Montrer que $x = y = 0$ n'est pas une solution de base réalisable.
4. En utilisant la méthode des deux phases, trouver une solution de base réalisable de (P).

Exercice 7 — *Un peu de théorie*

On dit qu'une matrice A de taille $n \times m$ avec $m < n$ est totalement unimodulaire si tous ses coefficients sont entiers et, pour toute sous matrice carrée B de A, le déterminant de B est 0, 1 ou -1. On souhaite résoudre le programme linéaire suivant où A est une matrice totalement unimodulaire et où les coefficients de b sont entiers.

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} Max & c \cdot {}^t x & \\ s.c. & A \cdot {}^t x & = {}^t b \\ & x & \geq 0 \end{array}\right.$$

1. Montrer que, pour toute sous matrice carrée B de A où B est inversible, les coefficients de B^{-1} sont entiers.
2. En déduire qu'il existe une solution optimale x^* de (P) avec des coefficients entiers.

Exercice 8 — *Le théorème de dualité faible*

Soient (P) et (D) les programmes suivants :

$$(P)\left\{\begin{array}{lll} Max & c \cdot {}^t x & \\ s.c. & A \cdot {}^t x & \leq {}^t b \\ & x & \geq 0 \end{array}\right.$$

$$(D)\left\{\begin{array}{lll} Min & b \cdot {}^t y & \\ s.c. & {}^t A \cdot {}^t y & \geq {}^t c \\ & y & \geq 0 \end{array}\right.$$

Montrer que, pour toute solution réalisable x de (P) et toute solution réalisable y de (D), $c \cdot {}^t x \leq b \cdot {}^t y$