TD 7 : Algorithme du gradient réduit

Recherche opérationnelle S3.

2024

Exercice 1 — *Exemple simple.*

Soit (P) le problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Écrire (P) sous forme standard avec deux variables x_3 et x_4 .
2. Représenter graphiquement le problème, inclure x_3 et x_4 sur le dessin.
3. Appliquer l'algorithme à partir de $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la base $\mathcal{B} = \{1, 3\}$ (3 itérations).
4. Vérifier que le point trouvé satisfait les conditions de Karush-Khun-Tucker.

Exercice 2 — *Gradient réduit et programme standard*

Soit (P) le programme suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que les fonctions g_i sont linéaires et qu'il existe $z > 0$ réalisable.

1. Écrire la forme standard de (P) en rajoutant m variable. On notera $y_1, y_2, \dots, y_{n+m}$ les variables de ce programme et f' sa fonction objectif.

2. Montrer que si on fixe les valeurs de $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ à z alors, pour toute valeur de $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$,

$y_{n+i} \geq 0$. On note y_0 cette solution.

3. Montrer qu'il est possible de démarrer l'algorithme du gradient réduit depuis y_0 avec la base $B = \{n+i, i \in \llbracket 1; m \rrbracket\}$.
4. Calculez la direction d obtenue à la première itération et montrer que, pour tout $i \leq n$, $d_i = -(\nabla f(z))_i$.

Exercice 3 — Objectif linéaire

Soit (P) le programme suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c \cdot x \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où A est une matrice de taille $m \times n$ avec $m \leq n$ et b un vecteur de taille m .

Ce type de programme peut être résolu avec l'algorithme du simplexe, similaire à l'algorithme du gradient réduit. On rappelle que, dans le simplexe, toute variable de la non-base N est nulle.

1. On se place en une solution de base réalisable : une solution réalisable x et une base B telle que pour tout $i \in N$, $x_N = 0$. Calculer le gradient réduit et retrouvez la formule des coûts réduits de l'algorithme du simplexe.
2. On suppose que l'espace $Ax = b; x \geq 0$ est borné. Montrer que si, lors d'une itération de l'algorithme du gradient réduit, $d \neq \bar{0}$, il y a nécessairement une variable de x qui est nulle à l'issue de l'itération.
3. Y a-t-il nécessairement changement de base dans ce cas ?
4. On rappelle que l'algorithme du simplexe se déplace de point en point en inversant une variable de base et une variable de non base à chaque itération. Montrer que, même si on commence au même point avec la même base, il existe des cas où l'algorithme du gradient réduit choisit une direction différente de celle de l'algorithme du simplexe.