# TD 8 : Méthodes des pénalités et des barrières

Recherche opérationnelle S3.

2024

**Exercice 1 — *Pénalité de Beltrami***

On souhaite minimiser $f(x) = x_1 + x_2$ sous contrainte $x_1^2 - x_2 \leq 2$.

1. Résoudre le problème avec la méthode des pénalités de Beltrami.
2. Même question en se ramenant à un problème d'égalité : minimiser $f(x) = x_1 + x_2$ sous contrainte $x_1^2 - x_2 + x_3^2 = 2$.

**Exercice 2 — *Pénalité des barrière***

On souhaite minimiser $f(x) = x_1 + x_2$ sous contrainte $x_1^2 - x_2 \leq 2$. Résoudre le problème avec la méthode des barrières.

**Exercice 3 — *Pénalité et multiplicateurs de Lagrange***

Soit un problème générique, on souhaite minimiser $f(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $g_i(x) \leq 0$ pour tout $i \in [\![1; m]\!]$ et tel que $h_j(x) = 0$ pour tout $j \in [\![1; p]\!]$. On applique la méthode des pénalités avec la Pénalité $P$ de Beltrami. On note $q(x, \mu) = f(x) + \mu P(x)$ et $x_k = \arg\min q(x, k)$.

On suppose que $f$, les $g_i$ et $h_j$ sont $C^1$. Soit $x^*$ une solution optimale de $f$, on suppose que $x^*$ vérifie le critère de qualification de l'indépendance linéaire. Enfin, on suppose que la suite $x_k$ converge vers $x^*$.

1. Rappelez les conditions de Kuhn-Tucker pour ce problème en $x^*$, on notera $\lambda_i$ et $\mu_j$ les coefficients multiplicateurs de Lagrange associés aux fonctions $g_i$ et $h_j$.
2. Est-il possible qu'il existe plusieurs $\lambda_i$, $\mu_j$ vérifiant ces conditions ?
3. Écrire le gradient de $q(x, k)$ en $x_k$. À quelle valeur est égal ce gradient ?
4. En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} 2kg_i^+(x_k) = \lambda_i$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} 2kh_j(x_k) = \mu_i$, si ces limites existent.

**Exercice 4 — *Barrière interne***

On s'intéresse au problème suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = x^2 \quad \text{s.c.} \begin{cases} x - 1 \leq 0 & (1) \\ -x - 1 \leq 0 & (2) \\ -x^2 \leq 0 & (3) \end{cases}$$

1. Représenter ce problème et une barrière logarithmique associée graphiquement. Est-ce que ce problème satisfait les hypothèses nécessaires à l'utilisation des barrières logarithmique et inverse ?
2. Quelle que soit la réponse à la question précédente, tenter de résoudre ce problème en utilisant la méthode de la barrière avec une barrière logarithmique.
3. On remplace la contrainte $-x^2 \leq 0$ par $g_1(x) \leq 0$ avec
$$g_3(x) = \quad \text{s.c.} \begin{cases} -(x + \frac{1}{2})^2 \text{ si } x \leq \frac{-1}{2} \\ -(x - \frac{1}{2})^2 \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Représenter ce problème et un barrière associée graphiquement.
4. Peut-on résoudre ce problème avec la méthode des barrières ? Comment pourrait-on contourner ce problème ?